

Η ύλη που εξετάζεται στο 5^ο κριτήριο είναι
μέχρι και τις μεθόδους ολοκλήρωσης.

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση f ορίζεται σ' ένα διάστημα Δ , παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο x_0 που βρίσκεται στο εσωτερικό του Δ και είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε:

$$f'(x_0) = 0$$

Πώς ονομάζεται το παραπάνω θεώρημα;

(Μονάδες 6+1)

A2. Έστω f μια συνάρτηση που ορίζεται σ' ένα διάστημα Δ .

α) Ποια είναι τα **κρίσιμα σημεία** της f στο Δ ;

β) Τί ονομάζουμε **αρχική** συνάρτηση ή **παράγουσα** της f στο διάστημα Δ ;

(Μονάδες 3+3)

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

« Αν η συνάρτηση $f: (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και $f'(x) = 0$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε είναι σταθερή. »

Είναι ο παραπάνω ισχυρισμός σωστός; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Παίρνετε 1 μονάδα για τη σωστή απάντηση και 3 μονάδες για τη δικαιολόγησή της)

(Μονάδες 4)

A4. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (**Σ**) ή λανθασμένη (**Λ**) κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν η συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** και **παραγωγίσιμη** στο διάστημα Δ , τότε:

$$f'(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Σ Λ

β) Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης f είναι ολικό μέγιστο αυτής.

Σ Λ

γ) Η εφαπτομένη της C_f σε ένα σημείο καμπής διαπερνά την γραφική παράσταση της f .

Σ Λ

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε η ισότητα:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$$

ισχύει **μόνο** όταν: $\alpha < \gamma < \beta$.

Σ Λ

(Μονάδες 2x4)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - a}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$, όπου $a \in \mathbb{R}$.

B1. Αν είναι γνωστό ότι η ευθεία $\varepsilon: y = -1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, να βρείτε τον πραγματικό αριθμό a .

(Μονάδες 4)

Για $a = 1$

B2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 4)

B3. (α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

(β) Να δείξετε ότι για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$ η εξίσωση:

$$f(\kappa) = x^{2025} - (x - 1)^{2024}$$

έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

(Μονάδες 4+4)

B4. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f' ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 4)

B5. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_{-1}^1 [1 + f(x)] dx$$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

Για τον πραγματικό αριθμό a και τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν τα εξής:

- $0 < a \leq 2$
- $f'(x) = (2x + a)e^{-f(x)}$, $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = \ln 2$

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x) = \ln(x^2 + \alpha x + 2)$, $x \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 5)

Αν επιπλέον $f(x) \geq \ln(3 - \alpha)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

Γ2. Να δείξετε ότι $\alpha = 2$.

(Μονάδες 5)

Γ3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 5)

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο:

$$L = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln|x+1|}{f(2x+1) + f(x^2+2x)}$$

(Μονάδες 5)

Γ5. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$J = \int_{-1}^0 |(2x+2) \cdot (f(x) - \ln 2)| dx$$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν τα εξής:

- $g'(x) + g(x) = \frac{e^{-x}}{x}$, για κάθε $x > 0$

- $g(1) = 0$

- $h(x) = x^2 e^{x-1} - \int_0^1 h(t) dt - \frac{2+e}{e}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = e^x \cdot g(x) - \ln x$, $x > 0$ είναι σταθερή και ότι

$$g(x) = \frac{\ln x}{e^x}, x > 0$$

(Μονάδες 3+2)

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g έχει ένα μόνο κρίσιμο σημείο x_0 , το οποίο μάλιστα ανήκει στο διάστημα $(1,2)$ και είναι θέση μεγίστου.

(Μονάδες 5)

Δ3. Να δείξετε ότι

$$h(x) = x^2 e^{x-1} - 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

(Μονάδες 5)

Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} h(x), & x < 1 \\ g(x), & x \geq 1 \end{cases}$

Δ4. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει δύο θέσεις τοπικού μεγίστου και μία θέση τοπικού ελαχίστου.

(Μονάδες 5)

Δ5. Να λύσετε την εξίσωση:

$$e^3 h(x) + e^3 = e^3 (x + 2)^2 + 4$$

στο διάστημα $(-\infty, 0)$.

(Μονάδες 5)

Καλή Εισαγωγή !

(*) Το παρόν κριτήριο εξέτασης συντάχθηκε από την ομάδα διδασκόντων του Τομέα Μαθηματικών του Φροντιστηρίου αξία και αποτελεί πνευματική τους ιδιοκτησία.

Η χρήση τους εκτός Φροντιστηρίου, επιτρέπεται μόνο για εκπαιδευτικούς σκοπούς. Οποιαδήποτε άλλη χρήση ή αναπαραγωγή χωρίς άδεια, μπορεί να επιφέρει τις προβλεπόμενες από το Νόμο κυρώσεις.