

ΛΥΣΕΙΣ 5^{ου} ΚΡΙΤΗΡΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 142-143.

A2. (α) Σχολικό βιβλίο σελίδα 143.

(β) Σχολικό βιβλίο σελίδα 185.

A3. Λάθος. Σχολικό βιβλίο σελίδα 134.

A4. $\alpha=\Lambda$, $\beta=\Lambda$, $\gamma=\Sigma$, $\delta=\Lambda$.

ΘΕΜΑ Β

B1. Η ευθεία $\varepsilon: y = -1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ αν και μόνο αν:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x - a}{e^x + 1} \right) = -1 \Leftrightarrow \frac{0 - a}{0 + 1} = -1 \Leftrightarrow -a = -1 \Leftrightarrow a = 1$$

Τελικά

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}, x \in \mathbb{R}$$

B2. Η συνάρτηση f ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και είναι συνεχής ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$f'(x) = \dots = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Είναι προφανές ότι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν παρουσιάζει ακρότατα.

B3. (α) Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $\mathbb{R}$.

Επομένως θα έχει σύνολο τιμών: $f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$

Έχουμε όμως:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} \stackrel{DLH}{=} 1$$

Άρα η συνάρτηση f έχει **σύνολο τιμών**:

$$f(\mathbb{R}) = (-1, +1)$$

B3. (8) Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$ η εξίσωση: $f(\kappa) = x^{2025} - (x-1)^{2024}$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$x^{2025} - (x-1)^{2024} - f(\kappa) = 0 \quad (1)$$

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $g(x) = x^{2025} - (x-1)^{2024} - f(\kappa)$, $x \in \mathbb{R}$ με $\kappa \in \mathbb{R}$.

- η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική

Είναι $g(0) = -1 - f(\kappa)$, $g(1) = 1 - f(\kappa)$ και για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$f(\kappa) \in f(\mathbb{R}) = (-1, +1) \Leftrightarrow -1 < f(\kappa) < 1 \Leftrightarrow -1 - f(\kappa) < 0 < 1 - f(\kappa) \Leftrightarrow g(0) < 0 < g(1)$$

Άρα

- $g(0) \cdot g(1) < 0$

Από το Θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $g(x) = 0$ και ισοδύναμα η (1), έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

B4. Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη με

$$f''(x) = \dots = \frac{2e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\frac{2e^x}{(e^x+1)^3} > 0$, έχουμε:

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0$
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - e^x < 0 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$

Άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ και παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 0$ το $f'(0) = 1/2$.

B5.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 (f(x) + 1) dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} + 1 \right) dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{e^x - 1 + e^x + 1}{e^x + 1} \right) dx = \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{2e^x}{e^x + 1} \right) dx = 2 \int_{-1}^1 \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} dx = 2 [\ln(e^x + 1)]_{-1}^1 = \\ &= 2 \left[\ln(e + 1) - \ln\left(\frac{1}{e} + 1\right) \right] = 2 \left[\ln(e + 1) - \ln\left(\frac{1 + e}{e}\right) \right] = \\ &= 2 [\ln(e + 1) - \ln(1 + e) + \ln e] = 2. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$f'(x) = e^{-f(x)} \cdot (2x + a) \Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)} = 2x + a \Leftrightarrow (e^{f(x)})' = (x^2 + ax)'$$

Από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. υπάρχει $c \in \mathbb{R}$, ώστε:

$$e^{f(x)} = x^2 + ax + c, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Για $x = 0$ η (1) γίνεται:

$$e^{f(0)} = 0 + 0 + c \Leftrightarrow e^{\ln 2} = c \Leftrightarrow c = 2$$

Άρα

$$e^{f(x)} = x^2 + ax + 2, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι το τριώνυμο $x^2 + ax + 2$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = a^2 - 8 \leq 4 - 8 < 0, \text{ αφού } 0 < a \leq 2 \Rightarrow a^2 \leq 4$$

Άρα είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η (2) γίνεται:

$$f(x) = \ln(x^2 + ax + 2), x \in \mathbb{R}$$

Γ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με:

$$f'(x) = \frac{2x + a}{x^2 + ax + 2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x) \geq \ln(3 - a) \Leftrightarrow f(x) \geq f(-1)$$

Συνεπώς

- η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο (επομένως και **τοπικό ελάχιστο**) στο $x_0 = -1$
- το $x_0 = -1$ είναι **εσωτερικό σημείο** του $\mathbb{R}$
- η f είναι **παραγωγίσιμη** στο x_0

Άρα, σύμφωνα με το **Θεώρημα Fermat**:

$$f'(-1) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2 + a}{1 - a + 2} = 0 \Leftrightarrow a = 2$$

Τελικά

$$f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2), \quad x \in \mathbb{R}$$

Γ3. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$f'(x) = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Επειδή ο παρονομαστής είναι θετικός για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -1$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x + 2 < 0 \Leftrightarrow x < -1$

Επειδή επιπλέον η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(-\infty, -1]$, **γνησίως αύξουσα** στο $[-1, +\infty)$ και θα έχει **ολικό ελάχιστο** στο $x_0 = -1$ το $f(-1) = \ln 1 = 0$.

Γ4. Στο Γ3 δείξαμε ότι $f(x) \geq f(-1) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει **μόνο** για $x = -1$.

Άρα **κοντά στο -1** είναι $x \neq -1 \Leftrightarrow 2x \neq -2 \Leftrightarrow 2x + 1 \neq -1 \Leftrightarrow f(2x + 1) > 0$.

Επιπλέον $f(x^2 + 2x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα κοντά στο -1 θα είναι:

$$f(2x+1) + f(x^2+2x) > 0 \quad (3)$$

Τα πολυώνυμα $2x+1$ και x^2+2x είναι συνεχή ενώ και η f είναι συνεχής, άρα

$$\lim_{x \rightarrow -1} [f(2x+1) + f(x^2+2x)] = f(-1) + f(-1) = 0 \quad (4)$$

Από τις (3) και (4) έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{f(2x+1) + f(x^2+2x)} = +\infty \quad (5)$$

Αν θέσουμε $u = |x+1|$, τότε $\lim_{x \rightarrow -1} u = \lim_{x \rightarrow -1} |x+1| = 0$ και $u > 0$ κοντά στο -1 , επομένως

$$\lim_{x \rightarrow -1} \ln|x+1| = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty \quad (6)$$

Από τις (5) και (6) έχουμε τελικά:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln|x+1|}{f(2x+1) + f(x^2+2x)} = -\infty$$

Γ5. Για κάθε $x \in [-1, 0]$ έχουμε:

- $-1 \leq x \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq 2x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 2x+2 \leq 2$
- $-1 \leq x \leq 0 \Leftrightarrow_{f \uparrow [-1,0]} f(-1) \leq f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq \ln 2$

Επομένως: $(2x+2)(f(x) - \ln 2) \leq 0$, για κάθε $x \in [-1, 0]$ και το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\begin{aligned} J &= \int_{-1}^0 |(2x+2)(f(x) - \ln 2)| dx = \\ &= - \int_{-1}^0 (2x+2)(f(x) - \ln 2) dx = \\ &= - \int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 2)' (f(x) - \ln 2) dx = \\ &= - [(x^2 + 2x + 2)(f(x) - \ln 2)]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 2)(f(x) - \ln 2)' dx = \\ &= - [(x^2 + 2x + 2)(f(x) - \ln 2)]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 2) \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx \end{aligned}$$

$$= -[(x^2 + 2x + 2)(f(x) - \ln 2)]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 (2x + 2)dx$$

$$= -(2)(\ln 2 - \ln 2) + (1)(\ln 1 - \ln 2) + [x^2 + 2x]_{-1}^0 = -\ln 2 + 0 - (-1) = 1 - \ln 2$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$g(x) + g(x) = \frac{e^{-x}}{x} \quad (1)$$

Η συνάρτηση $\varphi(x) = e^x g(x) - \ln x$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με :

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= e^x g(x) + e^x g'(x) - \frac{1}{x} = e^x (g(x) + g'(x)) - \frac{1}{x} = \\ &\stackrel{(1)}{=} \frac{e^x \cdot e^{-x}}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0 \end{aligned}$$

Άρα

$$\varphi'(x) = 0, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Από τις συνέπειες του ΘΜΤ, υπάρχει $c \in \mathbb{R}$, ώστε:

$$\varphi(x) = c \Leftrightarrow e^x g(x) - \ln x = c \quad (2)$$

Για $x = 1$ η (2) γίνεται $e^1 g(1) - \ln 1 = c \Leftrightarrow 0 - 0 = c \Leftrightarrow c = 0$, επομένως:

$$e^x g(x) - \ln x = 0 \Leftrightarrow e^x g(x) = \ln x \Leftrightarrow$$

$$g(x) = \frac{\ln x}{e^x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

Δ2. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη με

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x} - \ln x}{e^x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

Αφού η g είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της, τα κρίσιμα σημεία της θα είναι μόνο τα εσωτερικά σημεία του $(0, +\infty)$ στα οποία η g' είναι ίση με 0.

Ορίζουμε τώρα τη συνάρτηση:

$$k(x) = \frac{1}{x} - \ln x, x \in (0, +\infty)$$

Η συνάρτηση k είναι παραγωγίσιμη με

$$k'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Επομένως η k είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(0, +\infty)$. Επιπλέον

- η k είναι **συνεχής** στο $[1, 2]$ ως παρ/μη

$$k(1) = \frac{1}{1} - \ln 1 = 1 > 0 \text{ και } k(2) = \frac{1}{2} - \ln 2 = \frac{1-2\ln 2}{2} = \frac{\ln e - \ln 4}{2} < 0, \text{ αφού } e < 4. \text{ Άρα}$$

- $k(1) \cdot k(2) < 0$

Επομένως, από το **Θεώρημα Bolzano**, υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$, ώστε $k(x_0) = 0$.

Αφού η k είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, το x_0 είναι η **μόνη ρίζα** της k και ισχύουν τα παρακάτω:

- $0 < x < x_0 \Leftrightarrow k(x) > k(x_0) \Leftrightarrow k(x) > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0$
- $x > x_0 \Leftrightarrow k(x) < k(x_0) \Leftrightarrow k(x) < 0 \Leftrightarrow g'(x) < 0$
- $g'(x_0) = 0$

Άρα **μοναδικό κρίσιμο σημείο** της g είναι το x_0 και ανήκει στο διάστημα $(1, 2)$.

Επιπλέον η g είναι γνησίως **αύξουσα** στο $(0, x_0]$ και γνησίως **φθίνουσα** στο $[x_0, +\infty)$ άρα το x_0 είναι **θέση ολικού μεγίστου** της g .

Δ3. Είναι

$$h(x) = x^2 e^{x-1} - \int_0^1 h(t) dt - \frac{2+e}{e}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Θέτουμε τώρα

$$\int_0^1 h(t) dt = c \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Οπότε

$$h(x) = x^2 e^{x-1} - c - \frac{2+e}{e}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (4)$$

και

$$\begin{aligned} c &= \int_0^1 h(t) dt = \int_0^1 \left(t^2 e^{t-1} - c - \frac{2+e}{e} \right) dt = \int_0^1 (t^2 e^{t-1}) dt - \int_0^1 \left(c + \frac{2+e}{e} \right) dt = \\ &= \int_0^1 t^2 (e^{t-1})' dt - \left(c + \frac{2+e}{e} \right) \cdot \int_0^1 1 dt = [t^2 e^{t-1}]_0^1 - \int_0^1 2te^{t-1} dt - \left(c + \frac{2+e}{e} \right) [t]_0^1 = \\ &= 1 - \int_0^1 2t(e^{t-1})' dt - \left(c + \frac{2+e}{e} \right) \cdot 1 = 1 - [2te^{t-1}]_0^1 + \int_0^1 2e^{t-1} dt - c - \frac{2+e}{e} = \\ &= 1 - 2 + [2e^{t-1}]_0^1 - c - \frac{2+e}{e} = 1 - 2 + 2 - \frac{2}{e} - c - \frac{2}{e} - 1 = -c - \frac{4}{e} \end{aligned}$$

Άρα

$$c = -c - \frac{4}{e} \Leftrightarrow 2c = -\frac{4}{e} \Leftrightarrow c = -\frac{2}{e}$$

Συνεπώς η (4) γίνεται

$$h(x) = x^2 e^{x-1} + \frac{2}{e} - \frac{2+e}{e} = x^2 e^{x-1} - \frac{e}{e} = x^2 e^{x-1} - 1$$

Τελικά

$$h(x) = x^2 e^{x-1} - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Δ4.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^{x-1} - 1, & x < 1 \\ \frac{\ln x}{e^x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}$.

Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 1)$ ως πράξεις συνεχών.

Η f είναι συνεχής στο $(1, +\infty)$ ως πηλίκο συνεχών.

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 e^{x-1} - 1) = 1e^0 - 1 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\ln x}{e^x} \right) = \frac{0}{1} = 0$
- $f(1) = 0$

Άρα η f είναι συνεχής στο 1. Συνεπώς η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Η f είναι παρ/μη στο $(-\infty, 1)$ με $f'(x) = h'(x) = e^{x-1}(x^2 + 2x)$

Η f είναι παρ/μη στο $(1, +\infty)$ με $f'(x) = g'(x)$.

Στο $(1, +\infty)$ οι ρίζες και τα πρόσημα της f' είναι γνωστά από το Δ2.

Στο $(-\infty, 1)$ έχουμε

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-1}(x^2 + 2x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ή } x = 0$$

Επειδή $e^{x-1} > 0$, η f' έχει ίδιο πρόσημο με το τριώνυμο $x^2 + 2x$, για κάθε $x \in (-\infty, 1)$.

Επομένως ισχύει ο πίνακας:

x	$-\infty$	-2	0	1	x_0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$		
	T.M.		T.E.		T.M.		

Επιπλέον η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα θα είναι:

- γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $[0, x_0]$
- γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[-2, 0]$ και $[x_0, +\infty)$

και παρουσιάζει:

- τοπικό μέγιστο στα σημεία $x_1 = -2$ και $x_2 = x_0$
- τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x_3 = 0$.

Σημείωση: τα ακρότατα στις θέσεις x_2 και x_3 είναι ολικά. (Γιατί;)

Δ5. Στο διάστημα $(-\infty, 0)$ η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$h(x) + 1 = (x + 2)^2 + \frac{4}{e^3} \Leftrightarrow h(x) = (x + 2)^2 + 4e^{-3} - 1 \quad (5)$$

Παρατηρούμε ότι: $h(-2) = 4e^{-3} - 1$

Άρα

$$(5) \Leftrightarrow h(x) = (x + 2)^2 + h(-2) \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (h(-2) - h(x)) = 0 \quad (6)$$

Όμως στο διάστημα $(-\infty, 0)$ η h παρουσιάζει μέγιστο μόνο στο $x_1 = -2$ (από Δ4.), άρα

$$h(x) \leq h(-2) \Leftrightarrow h(-2) - h(x) \geq 0, \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0)$$

και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = -2$.

Ομοίως $(x + 2)^2 \geq 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = -2$.

Επομένως

$$(6) \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 2)^2 = 0 \\ h(-2) - h(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2$$

Τελικά η $x = -2$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης στο $(-\infty, 0)$.

