



ΟΜΙΛΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
3^ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΕΞΕΤΑΣΗΣ (*)

Η εξεταζόμενη ύλη είναι: συναρτήσεις, όριο, συνέχεια, διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός μέχρι και τις μεθόδους ολοκλήρωσης.

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και επιπλέον

- η f είναι συνεχής στο Δ
- $f'(x) = 0$, για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ

τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

(Μονάδες 6)

A2. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

(Μονάδες 3)

A3. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση $f: A \rightarrow R$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x_0 \in A$;

(Μονάδες 4)

A4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

« Έστω f μια συνάρτηση που είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα κρίσιμο σημείο αυτής. Τότε, υποχρεωτικά, το x_0 είναι θέση τοπικού ακροτάτου της f . »

Είναι σωστός ο παραπάνω ισχυρισμός; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(παίρνετε 1 μονάδα για τη σωστή απάντηση και 3 μονάδες για τη δικαιολόγησή της)

(Μονάδες 4)

A5. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (**Σ**) ή λανθασμένη (**Λ**) κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Κάθε τοπικό ελάχιστο μιας οποιασδήποτε συνάρτησης f είναι μικρότερο από οποιοδήποτε τοπικό μέγιστο της f .

Σ Λ

β) Για οποιασδήποτε συναρτήσεις f, g που είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα Δ ισχύει η ισοδυναμία: $f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

Σ Λ

γ) Κάθε συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.

Σ Λ

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

Σ Λ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+ax-1}{x-1}$, $x \neq 1$ με $a \in \mathbb{R}$.

Επιπλέον δίνεται ότι η κλίση της C_f στο σημείο $A(0,1)$ είναι ίση με 3.

B1. Να βρείτε το $a \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 4)

$$\text{Για } a = -2,$$

B2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 5)

B3. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

(Μονάδες 5)

B4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

(Μονάδες 6)

B5. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_2^3 (x-1-f(x)) \cdot \ln(x-1) dx$$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = e^x - \ln(x+1)$, $x > -1$.

Γ1. α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

β) Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f .

(Μονάδες 5+5)

Γ2. α) Να λύσετε την εξίσωση: $e^{x^2} = \ln(ex^2 + e)$

β) Να λύσετε την ανίσωση: $f'(e^{\sqrt{x}}) \geq f'(f(x) + \ln(\sqrt{x} + 1))$

(Μονάδες 5+5)

Γ3. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , -1 < x < 0 \\ 1 + e^x \eta \mu x & , 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης g .

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν τα εξής :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ef(x) - \eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} = 2$
- $xf'(x) = (x + 1)f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να δείξετε ότι $f'(0) = \frac{1}{e}$ και να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.

(Μονάδες 4+1)

Δ2. Να δείξετε ότι ισχύει:

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f(x)}{x}, \text{ για κάθε } x \neq 0$$

και να βρείτε τον τύπο της f .

(Μονάδες 5)

Αν $f(x) = xe^{x-1}$, $x \in \mathbb{R}$, τότε:

Δ3. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2024}{f(x-1) - f(2x-1)}$$

(Μονάδες 3+3)

Δ4. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α αν είναι γνωστό ότι:

$$(\alpha x + 1)(x + 1) + e^2 f(x) \geq -1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

(Μονάδες 5)

Για $\alpha = 1$

Δ5. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^a \frac{f(1-x)}{f(x) + (1-x)e^{-x}} dx$$

(Μονάδες 4)

Καλή Εμπειρία !!!

(*) Το παρόν κριτήριο εξέτασης συντάχθηκε από την ομάδα διδασκόντων του Τομέα Μαθηματικών του Φροντιστηρίου αξία και αποτελεί πνευματική τους ιδιοκτησία.

Η χρήση τους εκτός Φροντιστηρίου, επιτρέπεται μόνο για εκπαιδευτικούς σκοπούς. Οποιαδήποτε άλλη χρήση ή αναπαραγωγή χωρίς άδεια, μπορεί να επιφέρει τις προβλεπόμενες από το Νόμο κυρώσεις.

