

**ΛΥΣΕΙΣ 4ου ΚΡΙΤΗΡΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 133

A2. Σχολικό Βιβλίο σελ. 216

A3. Σχολικό Βιβλίο σελ. 141

A4. Ο ισχυρισμός είναι Λάθος

Για παράδειγμα, η συνάρτηση

$$f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = 3x^2.$$

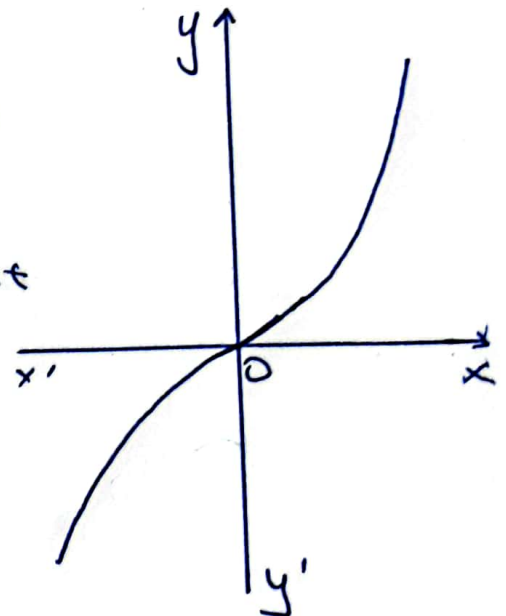
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Η f παρουσιάζει στη θέση $x_0 = 0$

κρίσιμο σημείο, όμως η f είναι

γνησίως αυξανόσα στο $\mathbb{R}$. Άρα το

$x_0 = 0$ δεν είναι το μοναδικό άκροτατο της f .



A5. α) 1 β) 1 γ) 2 δ) 2

ΘΕΜΑ Β.

B1. $f(x) = \frac{x^2 + ax - 1}{x-1}, x \neq 1$

Η f είναι παραγώγιμη, ως πηλίκο με:

$$f'(x) = \frac{(2x+a)(x-1) - (x^2+ax-1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x + ax - a - x^2 - ax + 1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - a + 1}{(x-1)^2}$$

Η τιμή της f στο $A(0,1)$ είναι ίση με 3, ορα

$$f'(0) = 3 \Leftrightarrow -a+1 = 3 \Leftrightarrow \boxed{a = -2}$$

B2. Για $a = -2$, $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)}, x \neq 1$

και $f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2} > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, ορα

f γινεται αυξουσα σε καθένα απο τα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, \infty)$ και δεν παρουσιάζει ακρότητα.

B3. f' παραγώγιμη ως πηλίκο με:

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x+3)2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{2(x-1)[(x-1)^2 - (x^2-2x+3)]}{(x-1)^4} = \frac{2(x^2-2x+1-x^2+2x-3)}{(x-1)^3}$$

$$f''(x) = -\frac{4}{(x-1)^3}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$		$+$	$-$
f		$\cup$	$\cap$

$\# f$ είναι κυρτή στο $(-\infty, 1)$
και κοίλη στο $(1, +\infty)$.

$\# Cf$ δεν έχει ευθεία κλίσης.

B4. Θα εφτάξω αν η $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[(x^2 - 2x - 1) \cdot \frac{1}{x-1} \right] = +\infty,$$

$$\text{Διότι } \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 2x - 1) = -2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty.$$

Άρα η $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της Cf .

Θα εφτάξω αν η Cf έχει ασύμπτωτη της μορφής
 $y = \lambda x + b$ στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \text{ ορα } \boxed{\lambda = 1}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \lambda x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 2x - 1}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x - 1 - x^2 + x}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = -1, \text{ ορα } \boxed{b = -1} \end{aligned}$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = -1$$

Άρα η Cf έχει στο $-\infty$ και στο $+\infty$ μόνη
ασύμπτωτη την ευθεία $y = x - 1$.

$$\begin{aligned}
 \text{B5. } I &= \int_2^3 (x-1 - \ln(x)) \cdot \ln(x-1) dx = \int_2^3 \left(x-1 - \frac{x^2-2x-1}{x-1} \right) \cdot \ln(x-1) dx \\
 &= \int_2^3 \frac{x^2-2x+1 - x^2+2x+1}{x-1} \cdot \ln(x-1) dx \\
 &= \int_2^3 \frac{2}{x-1} \cdot \ln(x-1) dx
 \end{aligned}$$

Θέτω $u = \ln(x-1)$ ορα $du = \frac{1}{x-1} dx$

Για $x=2$ έχω $u_1 = \ln 1 = 0$

Για $x=3$ έχω $u_2 = \ln 2$

ορα $I = \int_0^{\ln 2} 2u du = [u^2]_0^{\ln 2} = \ln^2 2 \Rightarrow \boxed{I = \ln^2 2}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. α) f παραγωγίσιμη ως διαφορά και συνεπώς παραγωγίσιμη αντιστρέφει με

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}, x > -1$$

f' παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων με:

$$f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \text{ για κάθε } x \in (-1, \infty)$$

Άρα f κυρτή στο $Df = (-1, \infty)$.

β) $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$ με $f'(0) = e^0 - \frac{1}{0+1} = 0$

$f''(x) > 0$ για κάθε $x > -1$ ορα $f' \uparrow$

(5)

- Για $-1 < x < 0 \xrightarrow{f' \uparrow} f'(x) < f'(0) = 0$ και f αυξανει στο $(-1, 0]$, ορα f γυρισως αλτρουσα στο $(-1, 0]$
- Για $x > 0 \xrightarrow{f' \uparrow} f'(x) > f'(0) = 0$ και f αυτανει στο $[0, +\infty)$, ορα f γυρισως αλτρουσα στο $[0, +\infty)$.

x	-1		0	$+\infty$
$f'(x)$	1	$-$	0	$+$
f		$\searrow$	$\nearrow$	
			οε.	

- $-1 < x < 0 \xrightarrow{f \downarrow} f(x) > f(0) = 1$
- $x > 0 \xrightarrow{f \uparrow} f(x) > f(0) = 1$

Αρα για καθε $x \in (-1, +\infty)$, ισχυει $f(x) > f(0) = 1$ με την ισοτητα να ισχυει μονο για $x=0$, επομεως η f παρουσιάζει οα το εααχιστο στο $x_0=0$, το $f(0) = 1$.

Γ2. α) Για καθε $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{x^2} = \ln(e^{x^2+1}) \Leftrightarrow e^{x^2} = \ln[e(x^2+1)] \Leftrightarrow$$

$$e^{x^2} = \ln e + \ln(x^2+1) \Leftrightarrow e^{x^2} - \ln(x^2+1) = 1 \Leftrightarrow$$

$$f(x^2) = 1$$

Για καθε $x \in (-1, +\infty)$, αρα Γ1 β., εαομε $f(x) \geq 1$

με την ισοτητα να ισχυει μονο για $x=0$, ορα

$$f(x^2) = 1 \Leftrightarrow f(x^2) = f(0) \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Αρα η εξισωση εαα μοναδικη λυση των $x=0$.

(6)

$$b) \cdot f'(e^{\sqrt{x}}) \geq f'(f(x) + \ln(\sqrt{x} + 1))$$

Η ανίσωση ορίζεται για $x \geq 0$, $e^{\sqrt{x}} > -1$ και $f(x) + \ln(\sqrt{x} + 1) > -1$.

- Για $x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 0 \xLeftrightarrow{e^{\uparrow 1}} e^{\sqrt{x}} \geq e^0 = 1$
- Για $x \geq 0$, ισχύει $f(x) \geq 0$ και $\sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 \geq 1 \xLeftrightarrow{\ln \uparrow 1} \ln(\sqrt{x} + 1) \geq \ln 1$

$$\Leftrightarrow \ln(\sqrt{x} + 1) \geq 0$$

$$\text{όρα } f(x) + \ln(\sqrt{x} + 1) \geq 0$$

Επομένως για $x \geq 0$, $f'(e^{\sqrt{x}}) \geq f'(f(x) + \ln(\sqrt{x} + 1)) \xLeftrightarrow{f' \uparrow}$

$$e^{\sqrt{x}} \geq f(x) + \ln(\sqrt{x} + 1) \Leftrightarrow e^{\sqrt{x}} - \ln(\sqrt{x} + 1) \geq f(x) \Leftrightarrow$$

$$f(\sqrt{x}) \geq f(x) \xLeftrightarrow[x \geq 0, \sqrt{x} \geq 0]{f \uparrow [0, \infty)} \sqrt{x} \geq x \Leftrightarrow x \geq x^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - x \leq 0 \Leftrightarrow x \in [0, 1].$$

$$13. \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & , -1 < x < 0 \\ 1 + e^x \ln x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$Dg = (-1, \pi]$$

Τα κρίσιμα σημεία της g στο $Dg = (-1, \pi]$ είναι τα εσωτερικά σημεία του Dg στα οποία η g δεν παραγωγίζεται, ή η παράγωγος της g είναι ίση με το μηδέν.

(7)

• Για $x \in (-1, 0)$, η g είναι παραγώγιμη με $g'(x) = f'(x) < 0$

• Για $x \in (0, 1)$, η g είναι παραγώγιμη με $g'(x) = e^x \eta \mu x + e^x \epsilon \omega x = e^x (\eta \mu x + \epsilon \omega x)$

$$\text{Για } x \in (0, 1), g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x (\eta \mu x + \epsilon \omega x) = 0 \Leftrightarrow e^x \neq 0$$

$$\eta \mu x = -\epsilon \omega x \quad (1)$$

Αν $\epsilon \omega x = 0$ τότε από (1), $\eta \mu x = 0$ άρα, διότι $\eta \mu^2 x + \epsilon \omega^2 x = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Αρα για } \epsilon \omega x \neq 0, (1) \Leftrightarrow \frac{\eta \mu x}{\epsilon \omega x} = -1 \Leftrightarrow \epsilon \phi x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} \text{ (αφού } x \in (0, 1)).$$

Αρα το σημείο $\frac{3\pi}{4}$ είναι κρίσιμο σημείο της g .

Εξετάζω αν g παρ/μ στο 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - \ln(x+1) - 1}{x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(e^x - \frac{1}{x+1} \right) = 1 - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + e^x \eta \mu x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^x \cdot \frac{\eta \mu x}{x} \right) = 1 \cdot 1 = 1$$

Αρα η g δεν έχει παραγώγιμο στο 0.

Επομένως τα κρίσιμα σημεία της g είναι 0 και $\frac{3\pi}{4}$.

Δ1. Έστω συνάρτηση $g(x) = \frac{e^{f(x)} - \eta \mu x}{1 - 6 \omega x}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $x \neq 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

όρα $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2$ και $f(x) = \frac{g(x)(1 - 6 \omega x) + \eta \mu x}{e}$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)(1 - 6 \omega x) + \eta \mu x}{e} = 0$, κι επειδή f συνεχής

στο $x_0 = 0$ ως παραγώγιση, ισχύει $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)(1 - 6 \omega x) + \eta \mu x}{x \cdot e} =$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{g(x)}{e} \cdot \frac{1 - 6 \omega x}{x} + \frac{1}{e} \cdot \frac{\eta \mu x}{x} \right) = \frac{2}{e} \cdot 0 + \frac{1}{e} \cdot 1 = \frac{1}{e}$

όρα $f'(0) = \frac{1}{e}$

Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της f στο $A(0, f(0))$

είναι: $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = \frac{1}{e} \cdot x$

όρα $\boxed{\varepsilon: y = \frac{1}{e} \cdot x}$

Δ2. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$: $x f'(x) = x f(x) + f(x) \Leftrightarrow x f'(x) - f(x) = x f(x)$

Για $x \neq 0$, $\frac{x f'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = \frac{f(x)}{x}$

Αρα για $x \in (-\infty, 0)$, θα υπάρχει σταθερά $C_1 \in \mathbb{R}$ ώστε

$\frac{f(x)}{x} = C_1 \cdot e^x$ και για $x \in (0, +\infty)$, θα υπάρχει σταθερά

$C_2 \in \mathbb{R}$ ώστε $\frac{f(x)}{x} = C_2 \cdot e^x$

$$\text{Αν } f(x) = \begin{cases} C_1 \cdot x \cdot e^x, & x \in (-\infty, 0) \\ 0, & x = 0 \\ C_2 \cdot x \cdot e^x, & x \in (0, \infty) \end{cases}$$

9

Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, από

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{e} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{C_1 \cdot x \cdot e^x}{x} = C_1 \\ \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{C_2 \cdot x \cdot e^x}{x} = C_2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Από (1)} \\ &C_1 = C_2 = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} x e^{x-1}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Επομένως $f(x) = x \cdot e^{x-1}, x \in \mathbb{R}$

Δ3. Για $x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{x-1} + x e^{x-1} = e^{x-1}(x+1)$

Για $x \in \mathbb{R}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -1$ και αφού f συνεχίς στο -1 , $f \uparrow [-1, \infty)$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1$ και αφού f συνεχίς στο -1 , $f \downarrow (-\infty, -1]$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$\boxed{0.6}$	$\nearrow$

$$x < -1 \Rightarrow f(x) > f(-1) = -\frac{1}{e^2}$$

$$x > -1 \Rightarrow f(x) > f(-1) = -\frac{1}{e^2}$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(-1) = -\frac{1}{e^2}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = -1$, οπότε η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο -1 , το $f(-1) = -\frac{1}{e^2}$.

• Για $x < 0$, $2x < x < 0 \Rightarrow 2x-1 < x-1 < -1$

$\xrightarrow{f \downarrow (-\infty, -1]} f(2x-1) > f(x-1) \Rightarrow f(x-1) - f(2x-1) < 0$

και $\lim_{x \rightarrow 0^-} (f(x-1) - f(2x-1)) \xrightarrow{f \text{ συνεχής}} f(-1) - f(-1) = 0$, ορα

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2024}{f(x-1) - f(2x-1)} = -\infty \quad (2)$$

• Για $x > 0$, $2x > x > 0 \Rightarrow 2x-1 > x-1 > -1 \xrightarrow{f \uparrow [-1, +\infty)}$

$f(2x-1) > f(x-1) \Rightarrow f(x-1) - f(2x-1) < 0$

και $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x-1) - f(2x-1)) \xrightarrow{f \text{ συνεχής}} f(-1) - f(-1) = 0$, ορα

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2024}{f(x-1) - f(2x-1)} = -\infty \quad (3)$$

Απο (2), (3) προκύπτει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2024}{f(x-1) - f(2x-1)} = -\infty$.

Δ4. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $(ax+1)(x+1) + e^2 f(x) + 1 \geq 0 \quad (4)$

Θεωρώ συνάρτηση $h(x) = (ax+1)(x+1) + e^2 f(x) + 1$, $x \in \mathbb{R}$

Η h είναι παραγωγίσιμη, ως σύνθεση παραγωγίσιμων με

$$h'(x) = a(x+1) + (ax+1) + e^2 f'(x)$$

$$h(-1) = 0 + e^2 f(-1) + 1 = e^2 \cdot \left(-\frac{1}{e^2}\right) + 1 = 0$$

Άρα από (4), $h(x) \geq h(-1) = 0$, συνεπώς η h παρουσιάζει ελάχιστο στο -1 .

Επειδή η h παρουσιάζει στο $x_0 = -1$ άκροτατο, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $Dh = \mathbb{R}$ και η h παραγωγίσιμη, από Θ. Fermat, θα ισχύει ότι $h'(-1) = 0 \Leftrightarrow -a+1 + e^2 f'(-1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{a=1}$.

$$Δ5. \quad I = \int_0^1 \frac{f(1-x)}{f(x) + (1-x)e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{f(1-x)}{f(x) + f(1-x)} dx \quad (5) \quad (11)$$

Θέτω $u=1-x$ άρα $x=1-u$ και $dx=-du$

Για $x=0$, $u=1$

Για $x=1$, $u=0$

Άρα $I = \int_1^0 \frac{f(u)}{f(1-u) + f(u)} (-du) = \int_0^1 \frac{f(x)}{f(1-x) + f(x)} dx \quad (6)$

Προσθέτω τις (5), (6) και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} I + I &= \int_0^1 \frac{f(1-x)}{f(x) + f(1-x)} dx + \int_0^1 \frac{f(x)}{f(1-x) + f(x)} dx \\ &= \int_0^1 \frac{f(1-x) + f(x)}{f(x) + f(1-x)} dx = \int_0^1 1 dx = [x]_0^1 = 1 \end{aligned}$$

Άρα $2I = 1 \Leftrightarrow \boxed{I = \frac{1}{2}}$.