



ΟΜΙΛΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 3<sup>ο</sup> ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΕΞΕΤΑΣΗΣ (\*)

Η εξεταζόμενη ύλη είναι: συναρτήσεις, όριο, συνέχεια, παράγωγος, εφαπτομένη, ρυθμός μεταβολής Θεώρημα Rolle, Θεώρημα Μέσης Τιμής, κανόνες De l' Hospital και ασύμπτωτες.

### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x \in [0, +\infty)$  είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα  $(0, +\infty)$ , με:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(Μονάδες 6)

**A2.** Να διατυπώσετε το **Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής**.

(Μονάδες 4)

**A3.** Πότε λέμε ότι η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  είναι **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ ;

(Μονάδες 3)

**A4.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

« Υπάρχει τουλάχιστον μία συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής στο σημείο  $x_0 \in D_f$  αλλά **δεν** είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»

Είναι ο παραπάνω ισχυρισμός σωστός; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(παίρνετε 1 μονάδα για τη σωστή απάντηση και 3 μονάδες για τη δικαιολόγησή της)

(Μονάδες 4)

**A5.** Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (**Σ**) ή λανθασμένη (**Λ**) κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

**α)** Αν η συνάρτηση  $f: [\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, τότε

$$f([\alpha, \beta)) = \left[ f(\alpha), \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) \right) \quad \Sigma \quad \Lambda$$

**β)** Μια συνάρτηση  $f$  είναι 1-1 αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει την  $C_f$  σε ένα, το πολύ, σημείο .

**Σ Λ**

**γ)** Κάθε συνάρτηση  $f$  η οποία διατηρεί πρόσημο στο διάστημα  $\Delta$  είναι συνεχής στο  $\Delta$ .

**Σ Λ**

δ) Αν το σημείο  $M$  κινείται στον άξονα  $x'x$  και η τετμημένη του  $x$  δίνεται από τη συνάρτηση θέσης  $x = S(t)$ , τότε η στιγμιαία ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή  $t_0$  είναι ο ρυθμός μεταβολής της θέσης  $S$  ως προς το χρόνο  $t$ , δηλαδή  $v(t_0) = S'(t_0)$ .

Σ Λ

(Μονάδες 2x4)

## ΘΕΜΑ Β

Για την συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  και τον πραγματικό αριθμό  $\alpha$  ισχύουν τα εξής:

- $f(e^x) = e^x + \alpha x - 2, x \in \mathbb{R}$
- $f''(1) = -1$

B1. Να δείξετε ότι:  $f(x) = x + \ln x - 2, x > 0$ .

(Μονάδες 6)

B2. (i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$ .

(ii) Να δείξετε ότι η εξίσωση:  $\frac{\ln x}{x} = \frac{2027}{x} - 1$

έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα  $(0, +\infty)$ .

(Μονάδες 4+4)

Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση  $g(x) = \frac{2-x^2}{x+1}, x \neq -1$ .

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g$ .

(Μονάδες 6)

B4. (i) Να βρείτε την εφαπτομένη της  $C_g$  στο σημείο που τέμνει τον άξονα  $y'y$ .

(ii) Να δείξετε ότι στο διάστημα  $(1, 2)$  η ευθεία  $\varepsilon: y = -2x + 2$  τέμνει την  $C_f$  σε ένα τουλάχιστον σημείο.

(Μονάδες 2+3)

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύουν τα παρακάτω:

- $f(x) = \alpha^x + x$
- $g(x) = 2\beta^{-x} - x^3 - 1$

- $\alpha, \beta \in (1, +\infty)$
- Η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $A(0, f(0))$  είναι κάθετη στην ευθεία  $\zeta: y = \frac{-1}{2}x + 2$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(g(x)-1)(g(\eta\mu x)-1)}{x\eta\mu x} = 4$

Γ1. Να δείξετε ότι  $\alpha = e = \beta$ .

(Μονάδες 4+4)

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = g(x)$ .

(Μονάδες 4)

Δίνεται επιπλέον και η συνάρτηση  $h(x) = (x - \pi)\eta\mu^2 x$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Γ3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $h$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα  $[0, \pi]$  και στη συνέχεια να δείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (0, \pi)$  τέτοιο, ώστε:

$$\eta\mu\xi = 2(\pi - \xi)\sigma\upsilon\nu\xi$$

(Μονάδες 2+4)

Γ4. Το σημείο  $M(x, y)$  κινείται στην ευθεία  $\zeta$  και η τεταγμένη του  $y$  ελαττώνεται με ρυθμό  $1\text{cm/sec}$ . Τη χρονική στιγμή  $t_1$  που το κινητό διέρχεται από το σημείο  $B(2,1)$  να βρείτε:

(α) Τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης  $x$  του  $M$

(β) Τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας  $\theta = \widehat{OM}$  που σχηματίζει η ημιευθεία  $OM$  με τον θετικό ημιάξονα  $Ox$ .

(Μονάδες 3+4)

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f: [-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  και  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύουν τα εξής:

- $g(x) = \frac{\alpha}{4}x^2 + \beta$
- $f(x) = \begin{cases} (\beta + \alpha x)e^{-\alpha x} & , x > 0 \\ g(x) & , -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$
- $\alpha \neq 0$  και  $\beta \in \mathbb{R}$

- Η συνάρτηση  $f$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα  $[-2, 1]$

στο

**Δ1.** Να δείξετε ότι  $\alpha = -1$  και  $\beta = 1$ .

(Μονάδες 3+3)

**Δ2. (i)** Να βρείτε την  $f'$  και το σύνολο τιμών της, αν γνωρίζετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[-2, +\infty)$ .

**(ii)** Να βρείτε τις τιμές της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη  $\varepsilon$  της  $C_f$  με τον άξονα  $x'$ .

(Μονάδες 3+3)

**Δ3.** Να δείξετε ότι στο διάστημα  $\Delta = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]$  η συνάρτηση  $f$  δεν είναι σταθερή και ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]$  τέτοιο, ώστε:

$$9f(x_0) = 2f\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 + 4f\left(\frac{1}{4}\right)$$

(Μονάδες 4)

**Δ4.** Να δείξετε ότι για κάθε  $x \geq 0$ , ισχύει:

$$xf(\eta\mu x) + (x - \eta\mu x)f(2x) \leq (2x - \eta\mu x)f(x)$$

(Μονάδες 5)

**Δ5.** Αν  $h(x) = x^3 + x + 2$ , να βρείτε την κοινή εφαπτομένη των  $C_h$  και  $C_g$ .

(Μονάδες 4)

**Καλή Εισαγωγή!**

(\*) Το παρόν κριτήριο εξέτασης συντάχθηκε από την ομάδα διδασκόντων του Τομέα Μαθηματικών του Φροντιστηρίου αξία και αποτελεί πνευματική τους ιδιοκτησία.

Η χρήση τους εκτός Φροντιστηρίου, επιτρέπεται μόνο για εκπαιδευτικούς σκοπούς. Οποιαδήποτε άλλη χρήση ή αναπαραγωγή χωρίς άδεια, μπορεί να επιφέρει τις προβλεπόμενες από το Νόμο κυρώσεις.