ΟΜΙΛΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ′ ΛΥΚΕΙΟΥ
2ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΕΞΕΤΑΣΗΣ (*)

Η εξεταζόμενη ύλη είναι: συναρτήσεις, όριο, συνέχεια, ορισμός παράγωγου, κανόνες παραγώγισης και ορισμός εφαπτομένης.

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\neq f(\beta)$, τότε για κάθε αριθμό $\boldsymbol{\eta}$ μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε: $\boldsymbol{f(x_0)=\eta}$.
Πώς ονομάζεται το παραπάνω θεώρημα**;** *(Μονάδες 6)*

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής και να κάνετε το ανάλογο σχήμα**.**
(Μονάδες 3+1)

Α3. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και τί ονομάζουμε παράγωγο της f στο x_0 ;
(Μονάδες 3)

Α4. Θεωρείστε τον ισχυρισμό:
« Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0\in D_f$, τότε υποχρεωτικά είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»

Είναι ο παραπάνω ισχυρισμός σωστός; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
*(παίρνετε 1 μονάδα για τη σωστή απάντηση και 3 μονάδες για τη **δικαιολόγησή** της)* *(Μονάδες 4)*

Α5. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή **Σ** ή λανθασμένη **Λ** κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e}{3}\right)^x=+\infty.$ **Σ Λ**

β) Ισχύει ότι: $(\ln(-x))'=\frac{1}{-x}$, για κάθε $x<0.$ **Σ Λ**

γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της, τότε ορίζεται εφαπτομένη σε κάθε σημείο της C_f . **Σ Λ**

δ) Κάθε συνάρτηση $f: A\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in A$ διατηρεί πρόσημο στο A . **Σ Λ**

(Μονάδες 2x4=8)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $\boldsymbol{f(x)=2e^{x-\alpha}-\alpha}$, με $\alpha\in\mathbb{R}$, για την οποία :

$$\boldsymbol{f'(x)-f(x)=1},\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Επιπλέον δίνεται και η συνάρτηση $\boldsymbol{g(x)=ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$, $\boldsymbol{x\in(-1,1)}$.

B1. Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 4)

$\boldsymbol{Aν\ \ \alpha=1}$

B2. Να ορίσετε την $\boldsymbol{gof}$.

(Μονάδες 5)

B3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι:

$$\boldsymbol{f^{-1}(x)=1+ln\left(\frac{x+1}{2}\right),\ x>-1}.$$

(Μονάδες 5)

B4. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$\boldsymbol{f^{-1}(x_0)=2x_0}$$

(Μονάδες 5)

B5. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\boldsymbol{A=\lim_{x\to+\infty}\left(f(1)x-\sqrt{x^2+x}\right)} \qquad\qquad \boldsymbol{B=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x+1)}{f(x)}\right)}$$

(Μονάδες 3+3)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση: $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}x^4-2x+e^{a-1} & ,x\geq 0\\ 2-a-\eta\mu(\beta x) & ,x<0\end{cases}}$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$ και $\beta\in\mathbb{R}^*$.

Γ1. Να βρείτε την τιμή του $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}$ για την οποία η συνάρτηση f είναι **συνεχής** στο $x_0=0$.

(Μονάδες 5)

Γ2. Να βρείτε την τιμή του $\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^*$ για την οποία η συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη** στο $x_0=0$.

(Μονάδες 4)

Για $\alpha = 1$ και $\beta = 2$

Γ3. α) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A\big(0, f(0)\big)$.

β) Να υπολογίσετε το όριο: $\boldsymbol{L = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3h)-f(-2h)}{h}}$

(Μονάδες 2+4)

Γ4. Αν είναι γνωστό ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$**,** να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$ τέτοιος, ώστε:

$$\boldsymbol{3f(x_0) = f\left(-\frac{\pi}{4}\right) + f\left(-\frac{\pi}{7}\right) + f\left(-\frac{\pi}{11}\right)}$$

(Μονάδες 5)

Γ5. Να δείξετε ότι **στο διάστημα $(0, 1)$** η εξίσωση $\boldsymbol{f(x) = 0}$ έχει **ακριβώς** μια ρίζα.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται *συνεχής* συνάρτηση $g\colon (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

- $\boldsymbol{g(e-1) = e}$
- $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to -1} g(x) = -\infty}$
- $\boldsymbol{\big(g(x) + \ln(x+1)\big)\cdot\big(g(x) - \ln(x+1)\big) = x\cdot(2g(x) - x)}$, για κάθε $x > -1$.

Επιπλέον δίνεται και η συνάρτηση $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} e^{1/x} - x & , \ x < 0 \\ g(x) & , \ x \geq 0 \end{cases}}$

Δ1. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g **.**

(Μονάδες 6)

Αν $\boldsymbol{g(x) = x + \ln(x+1)}$, $\boldsymbol{x \in (-1, +\infty)}$, τότε

Δ2. α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

β) Να δείξετε η εξίσωση: $\boldsymbol{f^2(x) + f(x) = 2}$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, οι οποίες είναι ετερόσημες.

γ) Να βρείτε τους $\boldsymbol{\kappa, \lambda} \in [0, +\infty)$ για τους οποίους: $\boldsymbol{e^{\kappa+\lambda} = \dfrac{1}{(\kappa+1)(\lambda+1)}}$

(Μονάδες 4+4+3)

Δ3. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του ερωτήματος **Δ2.β**, με $x_1 < x_2$, να δείξετε ότι η εξίσωση:

$$\boldsymbol{\frac{f(x)}{x - x_1} + \frac{f(1 - e^x)}{x - x_2} = 2024}$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2).

(Μονάδες 4)

Δ4. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\boldsymbol{M = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x + \eta\mu x}\left(f\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) - f(1)\right)}$$

(Μονάδες 4)

Καλή Επιτυχία !