ΛΥΣΕΙΣ 2ου ΚΡΙΤΗΡΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

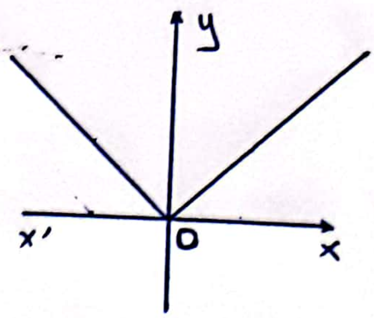
ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 76

Α2. Σχολικό Βιβλίο σελ. 77

Α3. Σχολικό Βιβλίο σελ. 95

Α4. Ο ισχυρισμός είναι Λάθος



Έστω η συνάρτηση $f(x)=|x|$.

Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ'αυτό, διότι

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

Α5. α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f(x) = 2e^{x-a} - a$, $D_f = \mathbb{R}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$f'(x) = 2e^{x-a}$, με $a \in \mathbb{R}$

$f'(x) - f(x) = 1 \Leftrightarrow 2e^{x-a} - 2e^{x-a} + a = 1 \Leftrightarrow \boxed{a = 1}$

Άρα $f(x) = 2e^{x-1} - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Β2. $D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$ άρα $x \in \mathbb{R}$ και $-1 < 2e^{x-1} - 1 < 1 \Leftrightarrow$

$0 < 2e^{x-1} < 2 \Leftrightarrow 0 < e^{x-1} < 1 \Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$

άρα $D_{g\circ f} = (-\infty, 1)$.

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = \ln\left(\frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}\right) = \ln\left(\frac{1 + 2e^{x-1} - 1}{1 - 2e^{x-1} + 1}\right) = \ln\left(\frac{2e^{x-1}}{2 - 2e^{x-1}}\right)$$

άρα $(g\circ f)(x) = \ln\left(\dfrac{e^{x-1}}{1 - e^{x-1}}\right)$, $x < 1$.

Β3. Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_2$

$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Rightarrow e^{x_1 - 1} < e^{x_2 - 1} \Rightarrow 2e^{x_1-1} < 2e^{x_2-1} \Rightarrow$
$2e^{x_1-1} - 1 < 2e^{x_2-1} - 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Άρα $f \uparrow$ στο $D_f = \mathbb{R}$, οπότε f 1-1 και αντιστρέψιμη.

Θέτω $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = 2e^{x-1} - 1 \Leftrightarrow y + 1 = 2e^{x-1} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{y+1}{2} = e^{x-1} \\ \dfrac{y+1}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\left(\dfrac{y+1}{2}\right) = x - 1 \\ y > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln\left(\dfrac{y+1}{2}\right) + 1 \\ y > -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f^{-1}(y) = \ln\left(\dfrac{y+1}{2}\right) + 1 \\ y > -1 \end{cases}$$

Άρα $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+1}{2}\right) + 1$, $x > -1$.

B4. Θεωρώ συνάρτηση $h(x)=f^{-1}(x)-2x,\ x\in[0,1]$

- h συνεχής στο $[0,1]$, ως πράξεις και σύνθεση συνεχών
- $h(0)=f^{-1}(0)=1+\ln\frac{1}{2}=1-\ln 2=\ln e-\ln 2>0$
  $h(1)=f^{-1}(1)-2=1+\ln 1-2=-1<0$ } άρα $h(0)h(1)<0$

Άρα απο Θεώρημα Bolzano θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0 \Leftrightarrow f^{-1}(x_0)=2x_0$.

B5. $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(1)x-\sqrt{x^2+x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)}{x+\sqrt{x^2+x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-(x^2+x)}{x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}$

$\overset{x>0}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x^2-x}{x+x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=-\dfrac{1}{2}$ άρα $\boxed{A=-\frac{1}{2}}$

$B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+1)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x-1}{2e^{x-1}-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x-1}{2e^{-1}\cdot e^x-1}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x\left(2-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(2e^{-1}-\frac{1}{e^x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\frac{1}{e^x}}{\frac{2}{e}-\frac{1}{e^x}}=\dfrac{2-0}{\frac{2}{e}-0}=e$

διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$

άρα $\boxed{B=e}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν

$$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \quad (1)$$

- $f(0) = e^{a-1}$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x^4 - 2x + e^{a-1}) = e^{a-1}$
- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(2-a-\eta\mu(bx)) = 2-a$

άρα $(1) \Leftrightarrow e^{a-1} = 2-a$

$\Leftrightarrow e^{a-1} + a - 2 = 0 \ (2)$

Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x) = e^{x-1} + x - 2,\ x \in \mathbb{R}$

Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

- $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Rightarrow e^{x_1-1} < e^{x_2-1}$
- $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2$

$\xrightarrow{(+)} g(x_1) < g(x_2)$

Άρα $g \uparrow$ στο $\mathbb{R}$, οπότε και 1-1.

$$(2) \Leftrightarrow g(a) = 0 \Leftrightarrow g(a) = g(1) \overset{g\ 1-1}{\Longleftrightarrow} \boxed{a = 1.}$$

Γ2. Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, πρέπει να είναι συνεχής στο σημείο αυτό. Άρα από Γ1. $a=1$, επομένως

$$f(x) = \begin{cases} x^4 - 2x + 1, & x \geq 0 \\ 1 - \eta\mu(bx), & x < 0 \end{cases}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, αν και μόνο αν

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lambda, \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\eta\mu(bx)-1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\eta\mu(bx)}{x}$

$$\overset{b\neq 0}{=} \lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{\eta\mu(bx)}{bx}\cdot b\right) \underset{\substack{x\to 0^- \\ u\to 0}}{\overset{bx = u}{=}} \lim_{u\to 0}\left(-\frac{\eta\mu u}{u}\cdot b\right) = -1\cdot b = -b$$

- $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^4 - 2x + 1 - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x}(x^3-2)}{\cancel{x}} = -2$

άρα $-b = -2 \Leftrightarrow \boxed{b = 2}$

Για $\alpha=1$ και $\beta=2$ έχουμε:

$$f(x)=\begin{cases} x^4-2x+1, & x\geq 0 \\ 1-\eta\mu 2x, & x<0 \end{cases}$$

Γ3. α) Απο το Γ2. $f'(0)=-2$, άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(0,1)$ είναι:

$\varepsilon: y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y-1=-2x \Leftrightarrow y=-2x+1$

Άρα $\boxed{\varepsilon: \ y=-2x+1}$

β) $$L=\lim_{h\to 0}\frac{f(3h)-f(-2h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(3h)-1+1-f(-2h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(3h)-1}{h}+\frac{1-f(-2h)}{h}\right]=\lim_{h\to 0}\left[3\left(\frac{f(3h)-1}{3h}\right)+2\left(\frac{f(-2h)-1}{-2h}\right)\right]$$

$$=3\cdot(-2)+2\cdot(-2)=-10 \quad \text{άρα} \quad \boxed{L=-10}$$

διότι

- $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(3h)-1}{3h}\ \underset{\substack{h\to 0\\ u\to 0}}{\overset{3h=u}{=\!=}}\ \lim_{u\to 0}\frac{f(u)-1}{u}=f'(0)=-2$
- $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(-2h)-1}{-2h}\ \underset{\substack{h\to 0\\ u\to 0}}{\overset{-2h=u}{=\!=}}\ \lim_{u\to 0}\frac{f(u)-1}{u}=f'(0)=-2$

Γ4. Παρατηρώ ότι: $-\frac{\pi}{4}<-\frac{\pi}{7}<-\frac{\pi}{11}<0 \xrightarrow{f \downarrow}$

$f(-\frac{\pi}{4})>f(-\frac{\pi}{7})>f(-\frac{\pi}{11})>f(0)$.

Έχουμε ότι:

$$\left.\begin{aligned} f(0)&<f(-\tfrac{\pi}{4})\leq f(-\tfrac{\pi}{4})\\ f(0)&<f(-\tfrac{\pi}{7})<f(-\tfrac{\pi}{4})\\ f(0)&<f(-\tfrac{\pi}{11})<f(-\tfrac{\pi}{4})\end{aligned}\right\}$$

προσθέτω κατα μέλη, άρα

$3f(0)<f(-\frac{\pi}{4})+f(-\frac{\pi}{7})+f(-\frac{\pi}{11})<3f(-\frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow$

$$f(0)<\frac{f(-\frac{\pi}{4})+f(-\frac{\pi}{7})+f(-\frac{\pi}{11})}{3}<f(-\tfrac{\pi}{4})$$

Ο αριθμός $\eta = \dfrac{f(-\frac{\pi}{4}) + f(-\frac{\pi}{7}) + f(-\frac{\pi}{11})}{3}$ είναι ⑥

μεταξύ των τιμών $f(-\frac{\pi}{4})$ και $f(0)$, και εφόσον f συνεχής

στο $[-\frac{\pi}{4}, 0]$ (ως άθροισμα και σύνθεση συνεχών),

από Θ.Ε.Τ. θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-\frac{\pi}{4}, 0)$ τέτοιο

ώστε $f(x_0) = \eta \Leftrightarrow f(x_0) = \dfrac{f(-\frac{\pi}{4}) + f(-\frac{\pi}{7}) + f(-\frac{\pi}{11})}{3}$,

κι επειδή $f \downarrow [-\frac{\pi}{4}, 0]$, το x_0 θα είναι και μοναδικό.

Γ5. Παρατηρώ ότι $f(1) = 0$, άρα η $f(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$.

Για $x \in (0,1)$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)(x^3+x^2+x-1) = 0 \overset{x<1}{\Longleftrightarrow}$

$x^3+x^2+x-1 = 0$

1	0	0	-2	1	1
	1	1	1	-1	
1	1	1	-1	0	

Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x) = x^3+x^2+x-1$, $x \in [0,1]$.

- h συνεχής στο $[0,1]$, ως πολυωνυμική
- $\left.\begin{array}{l} h(0) = -1 < 0 \\ h(1) = 2 > 0 \end{array}\right\}$ άρα $h(0) \cdot h(1) < 0$

Άρα από Θεώρημα Bolzano θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$.

Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in (0,1)$ με $x_1 < x_2$

$\left.\begin{array}{l} \cdot\ x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \\ \cdot\ x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \\ \cdot\ x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Longrightarrow} h(x_1) < h(x_2)$, άρα $h \uparrow$ στο $(0,1)$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι στο $(0,1)$ η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow x^3+x^2+x-1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$, έχει ακριβώς μία ρίζα.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x>-1$,

$(g(x)+\ln(x+1))\cdot(g(x)-\ln(x+1)) = x\cdot(2g(x)-x) \Leftrightarrow$

$g^2(x)-\ln^2(x+1) = 2xg(x)-x^2 \Leftrightarrow g^2(x)-2xg(x)+x^2=\ln^2(x+1) \Leftrightarrow$

$(g(x)-x)^2=\ln^2(x+1) \Leftrightarrow |g(x)-x| = |\ln(x+1)|$ (1)

Θεωρώ συνάρτηση $h(x)=g(x)-x$, $x>-1$, η οποία είναι συνεχής στο $(-1,+\infty)$, ως διαφορά συνεχών.

Άρα η (1) γίνεται $|h(x)|=|\ln(x+1)|$, $x>-1$ (2)

• $h(x)=0 \Leftrightarrow |h(x)|=0 \Leftrightarrow |\ln(x+1)|=0 \Leftrightarrow \ln(x+1)=0 \Leftrightarrow x+1=1 \Leftrightarrow \boxed{x=0}$

Άρα μοναδική ρίζα της h είναι το $x=0$.

Η h είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στα διαστήματα $(-1,0)$, $(0,+\infty)$, άρα θα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από αυτά.

• $\lim\limits_{x\to-1} h(x) = \lim\limits_{x\to-1^+}(g(x)-x) = -\infty$, άρα $h(x)<0$ κοντά στο -1^+

Επομένως στο $(-1,0)$ έχουμε, $h(x)<0$ και $\ln(x+1)<0$

άρα η (2) $\Leftrightarrow -h(x)=-\ln(x+1) \Leftrightarrow h(x)=\ln(x+1) \Leftrightarrow$

$g(x)-x=\ln(x+1) \Leftrightarrow g(x)=x+\ln(x+1)$, $x\in(-1,0)$.

• $h(e-1)=g(e-1)-(e-1)=e-e+1=1>0$, άρα $h(x)>0$ για $x>0$.

Επομένως στο $(0,+\infty)$ έχουμε $h(x)>0$ και $\ln(x+1)>0$

άρα η (2) $\Leftrightarrow h(x)=\ln(x+1) \Leftrightarrow g(x)-x=\ln(x+1) \Leftrightarrow$

$g(x)=x+\ln(x+1)$, $x\in(0,+\infty)$

Ισχύει ότι $h(0)=0 \Leftrightarrow g(0)-0=0 \Leftrightarrow g(0)=0$

Επομένως $g(x)=x+\ln(x+1)$, $x>-1$.

Δ2. $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}-x, & x<0 \\ x+\ln(x+1), & x\geq 0 \end{cases}$

α) · Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in(-\infty,0)$ με $x_1<x_2$:

· $x_1<x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2} \Rightarrow e^{\frac{1}{x_1}}>e^{\frac{1}{x_2}}$

· $x_1<x_2 \Rightarrow -x_1>-x_2$

$\xrightarrow{(+)} f(x_1)>f(x_2)$ άρα $f \downarrow$ στο $(-\infty,0)$.

Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$:

$x_1<x_2 \Rightarrow x_1+1<x_2+1 \Rightarrow \ln(x_1+1)<\ln(x_2+1)$

και $x_1<x_2$

$\xrightarrow{(+)} f(x_1)<f(x_2)$ άρα $f\uparrow$ στο $[0,+\infty)$.

Στο $(-\infty,0)$ η f είναι συνεχής, ως διαφορά και σύνθεση συνεχών.

Στο $(0,+\infty)$ η $f(x)=g(x)$ είναι συνεχής.

· $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(e^{\frac{1}{x}}-x\right)=0$,

<u>διότι</u> $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} \underset{\substack{x\to 0^- \\ u\to -\infty}}{\overset{\frac{1}{x}=u}{=\!=}} \lim\limits_{u\to -\infty}(e^u)=0$

· $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+\ln(x+1))=0$ και $f(0)=0$

άρα $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, άρα f συνεχής στο $x_0=0$.

Επομένως f συνεχής στο $D_f=\mathbb{R}$.

· Η f στο $\Delta_1=(-\infty,0)$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα

$f(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to 0^-} f(x), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right)=(0,+\infty)$ <u>διότι</u>

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}-x\right)=+\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{\frac{1}{x}} \underset{\substack{x\to -\infty \\ u\to 0}}{\overset{\frac{1}{x}=u}{=\!=}} \lim\limits_{u\to 0}(e^u)=1$.

• Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = [0,+\infty)$

άρα $f(\Delta_2) = [f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)) = [0,+\infty)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+\ln(x+1)) = +\infty$, διότι

$\lim_{x\to+\infty} \ln(x+1) \underset{\substack{x\to+\infty \\ u\to+\infty}}{\overset{x+1=u}{=\!=}} \lim_{u\to+\infty} (\ln u) = +\infty.$

Επομένως $f(D_f) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [0,+\infty)$.

β) Για $x\in\mathbb{R}$, $f^2(x)+f(x)-2=0 \Leftrightarrow (f(x)+2)(f(x)-1)=0 \Leftrightarrow$
$f(x)=-2$ ή $f(x)=1$.

Η εξίσωση $f(x)=-2$ είναι Αδύνατη, αφού $-2\notin f(D_f)$.

$1\in f(\Delta_1)$ και $f\downarrow$ στο $\Delta_1=(-\infty,0)$, άρα θα υπάρχει μοναδικό $x_1<0$ ώστε $f(x_1)=1$.

$1\in f(\Delta_2)$ και $f\uparrow$ στο $\Delta_2=[0,+\infty)$, άρα θα υπάρχει μοναδικό $x_2\geq 0$ ώστε $f(x_2)=1$. Όμως $f(0)=0\neq 1$ άρα $x_2>0$.

Επομένως η εξίσωση $f^2(x)+f(x)-2=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες ετερόσημες $x_1<0<x_2$.

γ) Για $\kappa,\lambda\in[0,+\infty)$, $e^{\kappa+\lambda} = \dfrac{1}{(\kappa+1)(\lambda+1)} \Leftrightarrow \kappa+\lambda = \ln\dfrac{1}{(\kappa+1)(\lambda+1)} \Leftrightarrow$

$\kappa+\lambda = -\ln[(\kappa+1)(\lambda+1)] \Leftrightarrow \kappa+\lambda = -\ln(\kappa+1)-\ln(\lambda+1) \Leftrightarrow$

$\kappa+\ln(\kappa+1)+\lambda+\ln(\lambda+1)=0 \Leftrightarrow f(\kappa)+f(\lambda)=0.$

Όμως για $x\geq 0$, ισχύει οι $f(x)\geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$. Άρα για τους $\kappa,\lambda\in[0,+\infty)$ θα ισχύει $f(\kappa)\geq 0$, $f(\lambda)\geq 0$

άρα $f(\kappa)+f(\lambda)=0 \Leftrightarrow f(\kappa)=0$ και $f(\lambda)=0 \Leftrightarrow$

$\boxed{\kappa=\lambda=0}$

Δ3. Στο (x_1,x_2) η δοθείσα εξίσωση γράφεται ισοδύναμα
$$f(x)(x-x_2)+f(1-e^x)(x-x_1)-2024(x-x_1)(x-x_2)=0.$$
Θεωρώ $\varphi(x)=f(x)\cdot(x-x_2)+f(1-e^x)\cdot(x-x_1)-2024(x-x_1)\cdot(x-x_2)$
με $x\in[x_1,x_2]$, όπου από Δ2. β) $x_1<0<x_2$ και $f(x_1)=1=f(x_2)$.

- φ συνεχής στο $[x_1,x_2]$, ως πράξεις και σύνθεση συνεχών
- $\varphi(x_1)=f(x_1)(x_1-x_2)=x_1-x_2<0$
  $\varphi(x_2)=f(1-e^{x_2})(x_2-x_1)>0$ διότι $x_2>0 \Leftrightarrow e^{x_2}>1$
  $\Leftrightarrow 1-e^{x_2}<0$ δηλ. $1-e^{x_2}\in\Delta_1$ άρα $f(1-e^{x_2})\in f(\Delta_1)=(0,+\infty)$
  άρα $f(1-e^{x_2})>0$

άρα $\varphi(x_1)\cdot\varphi(x_2)<0$, επομένως από Θεώρημα Bolzano
η εξίσωση $\varphi(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x-x_1}+\dfrac{f(1-e^x)}{x-x_2}=2024$ έχει
μία τουλάχιστον ρίζα στο (x_1,x_2).

Δ4. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με
$$f'(x)=(x+\ln(x+1))'=1+\frac{1}{x+1}, \text{ άρα } f'(1)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$
όμως $f'(1)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ άρα $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{3}{2}$.

$$M=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x+\eta\mu x}\cdot\left[f\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)-f(1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+\eta\mu x}\cdot\left[\frac{f(1+\frac{1}{x^2})-f(1)}{\frac{1}{x^2}}\right]=1\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

<u>Διότι</u>

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+\frac{\eta\mu x}{x}}=\dfrac{1}{1+0}=1$ αφού για $x>0$, $-1\le\eta\mu x\le1$
  $\Leftrightarrow -\dfrac{1}{x}\le\dfrac{\eta\mu x}{x}\le\dfrac{1}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}$ άρα από
  κ.π. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(1+\frac{1}{x^2})-f(1)}{\frac{1}{x^2}} \underset{\substack{x\to+\infty \\ h\to0}}{\overset{\frac{1}{x^2}=h}{=}} \lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{3}{2}$ άρα $\boxed{M=\dfrac{3}{2}}$