ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ′ ΛΥΚΕΙΟΥ
1ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΕΞΕΤΑΣΗΣ (*)

Η εξεταζόμενη ύλη είναι: συναρτήσεις, όριο, συνέχεια, ορισμός παράγωγου, κανόνες παραγώγισης και ορισμός εφαπτομένης.

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

(Μονάδες 6)

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα **Bolzano** και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του κάνοντας το κατάλληλο σχήμα**.**

(Μονάδες 2+2)

Α3. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη** σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και τί ονομάζουμε παράγωγο της f στο x_0 ;

(Μονάδες 3)

Α4. Θεωρείστε τον ισχυρισμό:

« Κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο $\mathbb{R}^*$ διατηρεί πρόσημο στο σύνολο αυτό.»

Είναι ο παραπάνω ισχυρισμός σωστός; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

*(παίρνετε 1 μονάδα για τη σωστή απάντηση και 3 μονάδες για τη **δικαιολόγησή** της)* **(Μονάδες 4)**

Α5. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή **Σ** ή λανθασμένη **Λ** κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι αντιστρέψιμη, τότε ισχύει:

$f(f^{-1}(x)) = x$, για κάθε $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ **Σ Λ**

β) Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ **Σ Λ**

γ) Για οποιαδήποτε συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) ισχύει ότι: $f(\alpha)f(\beta) < 0$. **Σ Λ**

δ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 , τότε:

$f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ **Σ Λ**

(Μονάδες 2x4=8)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $\boldsymbol{f(x)=\sqrt{x^2+\beta}-\alpha x}$, με $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}$ και $\boldsymbol{\beta>0}$, για την οποία :

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\sqrt{3} \text{ και } f(1)=1$$

Επιπλέον δίνεται και η συνάρτηση $\boldsymbol{g(x)=2-ln(x-1)}$, $\boldsymbol{x\in(1,+\infty)}$.

Β1. Να δείξετε ότι $\boldsymbol{\alpha=1}$ και $\boldsymbol{\beta=3}$.

(Μονάδες 2+2)

Β2. Αν είναι γνωστό ότι η συνάρτηση f είναι *γνησίως φθίνουσα στο* $\mathbb{R}$

i) να λύσετε την ανίσωση $\boldsymbol{f(x)>1}$ και

ii) να ορίσετε την $\boldsymbol{gof}$.

(Μονάδες 2+3)

Β3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g αντιστρέφεται και ότι:

$$g^{-1}(x)=1+e^{2-x}, x\in\mathbb{R}$$

(Μονάδες 5)

Β4. Να δείξετε ότι υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $x_0\in(1,2)$ τέτοιος, ώστε:

$$g^{-1}(x_0)=f(x_0)+x_0$$

(Μονάδες 5)

Β5. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$A=\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad\qquad B=\lim_{x\to 1} e^{-g(x)}$$

(Μονάδες 3+3)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν τα παρακάτω:

- Η f είναι **παραγωγίσιμη** στα σημεία $\boldsymbol{x=1}$ και $\boldsymbol{x=0}$
- $\boldsymbol{f'(1)+ln(f'(1)-1)=2}$

Γ1. Να δείξετε ότι $\boldsymbol{f'(1)=2}$

(Μονάδες 5)

Γ2. Να υπολογίσετε το όριο:

$$L = \lim_{x \to 1} \frac{f(3x-2) - f(2x-1)}{x-1}$$

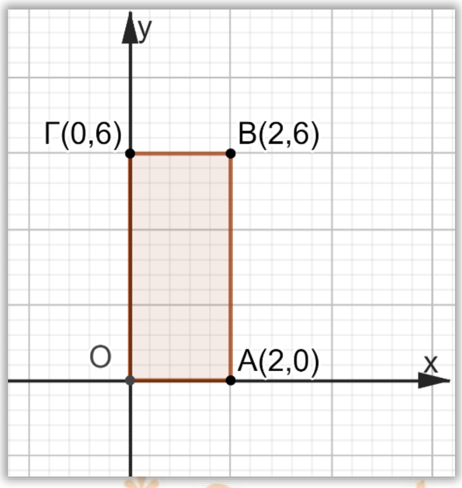
(Μονάδες 5)

Αν επιπλέον $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση f έχει τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \beta x^3 + \alpha x & , \quad x \geq 0 \\ -\sqrt{1-x} \cdot \eta\mu x , & x < 0 \end{cases}$$

Γ3. Να δείξετε ότι $\alpha = -1$ ***και*** $\beta = 1$ **.**

(Μονάδες 5)



Γ4. Αν η συνάρτηση $g: [0,2] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η γραφική παράστασή της βρίσκεται στο ορθογώνιο **ΟΑΒΓ** που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, να δείξετε ότι η C_f τέμνει την C_g σε ένα τουλάχιστον σημείο.

(Μονάδες 4)

Γ5. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης: $h(x) = f(1 - \sigma\upsilon\nu x), x \in [0, \pi]$.

(Μονάδες 6)

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $g: (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{g(x)} = +\infty$
- $g^2(x) = (e^x + 2x - 1)^2$, για κάθε $x \in (-\infty, 0]$

Επιπλέον δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\beta\cdot 2^x-\beta^{x+1}}{2\cdot\beta^x+2^{x+1}} & ,\ x>0 \\ g(x) & ,\ x\le 0 \end{cases}$$

Για την οποία ισχύουν τα εξής:

- $0<\beta\neq 1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\dfrac{3}{2}$

Δ1. Να δείξετε ότι: $g(x)=1-e^x-2x\,,x\in(-\infty,0]$.

(Μονάδες 5)

Δ2. Να δείξετε ότι $\beta=3$.

(Μονάδες 5)

Δ3. Έστω $T(x)=1+x\eta\mu\left(\dfrac{1}{x}\right),x\neq 0$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση: $g(x)=T(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-\infty,0)$.

β) Αν $T'\left(\dfrac{1}{\pi}\right)=\pi$, να υπολογίσετε το όριο:

$$K=\lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(1-T\left(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{x}\right)\right)$$

(Μονάδες 5+5)

Δ4. Αν είναι γνωστό ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και $\kappa<0<\lambda$, τότε να δείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{f(\kappa x)-f\left(\frac{2\kappa}{x^2}\right)}{x-1}+\frac{f(\lambda x)-f\left(\eta\mu(\lambda x)\right)}{x-2}=2025$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

(Μονάδες 5)

Καλή Επιτυχία !