# ΛΥΣΕΙΣ 1ου ΚΡΙΤΗΡΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

## ΘΕΜΑ Α

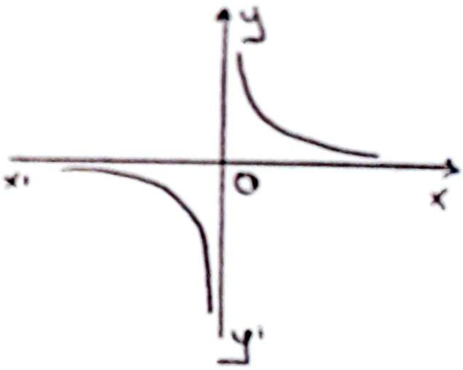
Α1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 99

Α2. Σχολικό Βιβλίο σελ. 74

Α3. Σχολικό Βιβλίο σελ. 95

Α4. Ο ισχυρισμός είναι Λάθος

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$ είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο $D_f=\mathbb{R}^*$, παρ'όλα αυτά δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο αφού $f(x)<0$ για $x<0$ και $f(x)>0$ για $x>0$.




Α5. α) Λ β) Λ γ) Λ δ) Σ

# ΘΕΜΑ Β

**Β1.** $f(x)=\sqrt{x^2+\beta}-\alpha x$ $\quad D_f=\mathbb{R}$

· $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x^2+\beta}-\alpha\cdot x\right)=\sqrt{\beta}$

άρα $\sqrt{\beta}=\sqrt{3} \iff \boxed{\beta=3}$

· $f(1)=1 \iff \sqrt{1^2+3}-\alpha=1 \iff 2-\alpha=1 \iff \boxed{\alpha=1}$

**Β2.** $f(x)=\sqrt{x^2+3}-x$, $\quad D_f=\mathbb{R}$

i) Για $x\in\mathbb{R}$, $f(x)>1 \iff f(x)>f(1) \overset{f\downarrow}{\iff} \boxed{x<1}$

ii) $g(x)=2-\ln(x-1)$ με $D_g=(1,+\infty)$

$D_{g\circ f}=\{x\in D_f \text{ και } f(x)\in D_g\}$

δηλαδή $x\in\mathbb{R}$ και $f(x)>1 \overset{B2\,i)}{\iff} x<1$

άρα $D_{g\circ f}=(-\infty,1)$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=2-\ln\left(\sqrt{x^2+3}-x-1\right)$.

**Β3.** Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in(1,+\infty)$ με $x_1<x_2$:

$1<x_1<x_2 \Rightarrow 0<x_1-1<x_2-1 \Rightarrow \ln(x_1-1)<\ln(x_2-1)$

$\Rightarrow -\ln(x_1-1)>-\ln(x_2-1) \Rightarrow 2-\ln(x_1-1)>2-\ln(x_2-1)$

$\Rightarrow g(x_1)>g(x_2)$

Η $g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $D_g$, άρα και 1-1, επομένως αντιστρέφεται.

Για $x>1$, $g(x)=y \Leftrightarrow x=g^{-1}(y)$.

$$\begin{cases} g(x)=y \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-\ln(x-1)=y \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x-1)=2-y \\ x>1,\ y\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-1=e^{2-y} \\ x>1,\ y\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=e^{2-y}+1 \\ x>1,\ y\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g^{-1}(y)=e^{2-y}+1 \\ y\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Άρα $g^{-1}(x)=e^{2-x}+1,\ x\in\mathbb{R}$.

B4. Θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=g^{-1}(x)-f(x)-x,\ x\in[1,2]$

· $h$ συνεχής στο $[1,2]$, ως πράξεις και σύνθεση συνεχών

· $h(1)=g^{-1}(1)-f(1)-1=e+1-1-1=e-1>0$

$h(2)=g^{-1}(2)-f(2)-2=2-\sqrt{7}+2-2=2-\sqrt{7}<0$

$\Big\}\ h(1)h(2)<0$

Άρα από Θεώρημα Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0 \Leftrightarrow g^{-1}(x_0)=f(x_0)+x_0$.

B5. $$A=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3}-x)(\sqrt{x^2+3}+x)}{\sqrt{x^2+3}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}+x} \overset{x>0}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+1}=0\cdot\frac{3}{2}=0$$

διότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2}=0$ άρα $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+1\right)=1+1=2$

άρα $\boxed{A=0}$.

$$B=\lim_{x\to 1} e^{-g(x)}=\lim_{x\to 1^+} e^{\ln(x-1)-2}=\lim_{u\to -\infty} e^{u}=0$$

διότι, θέτω $u=\ln(x-1)-2$

$$\lim_{x\to 1^+} u=\lim_{x\to 1^+}\left[\ln(x-1)-2\right]\ \underset{\substack{x\to 1^+\\ y\to 0^+}}{\overset{x-1=y}{=\!=\!=}}\ \lim_{y\to 0^+}(\ln y-2)=-\infty$$

άρα $u\to -\infty$.

Άρα $\boxed{B=0}$

## ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(1)+\ln(f'(1)-1)=2 \Leftrightarrow \ln(f'(1)-1)+f'(1)-1=1 \quad (1)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x)=\ln x+x,\ x>0$.

Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$:

$$\left.\begin{array}{l}\cdot\ x_1<x_2 \Rightarrow \ln x_1<\ln x_2\\ \cdot\ x_1<x_2\end{array}\right\}$$ προσθέτω κατά μέλη $\ln x_1+x_1<\ln x_2+x_2 \Rightarrow k(x_1)<k(x_2)$

Άρα η $k(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, επομένως και 1-1

Επομένως $(1) \Leftrightarrow k(f'(1)-1)=1 \Leftrightarrow k(f'(1)-1)=k(1)$

$$\overset{k\ 1\text{-}1}{\Longleftrightarrow} f'(1)-1=1 \Leftrightarrow \boxed{f'(1)=2}$$

Γ2. $$L=\lim_{x\to 1}\frac{f(3x-2)-f(2x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(3x-2)-f(1)+f(1)-f(2x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{f(3x-2)-f(1)}{x-1}-\frac{f(2x-1)-f(1)}{x-1}\right]=6-4=2,$$ διότι

$$\cdot\ \lim_{x\to 1}\frac{f(3x-2)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1} 3\cdot\frac{f(3x-2)-f(1)}{3x-3}\ \underset{\substack{x\to 1\\ u\to 1}}{\overset{\substack{u=3x-2\\ 3x=u+2}}{=\!=\!=}}$$

$$=\lim_{u\to 1} 3\cdot\frac{f(u)-f(1)}{u-1}=3f'(1)=6.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(2x-1)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1} 2\cdot\frac{f(2x-1)-f(1)}{2x-2}$$

$$\xrightarrow[\substack{x\to 1\\ u\to 1}]{\substack{u=2x-1\\ 2x=u+1}}\lim_{u\to 1} 2\cdot\frac{f(u)-f(1)}{u-1}=2\cdot f'(1)=4$$

άρα $\boxed{L=2}$

Γ3. $f(x)=\begin{cases} 6x^3+ax, & x\geq 0\\ -\sqrt{1-x}\cdot \eta\mu x, & x<0\end{cases}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_1=0$, αν και μόνο αν

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\in\mathbb{R}$$

- $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sqrt{1-x}\cdot\eta\mu x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left[-\sqrt{1-x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right]=-1\cdot 1=-1$

- $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{6x^3+ax}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(6x^2+a)}{x}=\lim_{x\to 0^+}(6x^2+a)=a$

άρα $\boxed{a=-1}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_2=1$ με $f'(1)=2$, άρα

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=2$$

- $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{6x^3-x-6+1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{6(x^3-1)-(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{6(x-1)(x^2+x+1)-(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(6x^2+6x+6-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}(6x^2+6x+6-1)=3\cdot 6-1$

άρα $3 6-1=2\Leftrightarrow 3 6=3\Leftrightarrow \boxed{6=1}$

Άρα $f(x)=\begin{cases} x^3-x, & x\geq 0 \\ -\sqrt{1-x}\cdot ημx, & x<0 \end{cases}$

Γ4. Αρκεί να δείξουμε ότι, στο $[0,2]$ η εξίσωση $f(x)=g(x)$
$\Leftrightarrow f(x)-g(x)=0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $φ(x)=f(x)-g(x)$, $x\in[0,2]$

- $φ$ συνεχής στο $[0,2]$, ως διαφορά συνεχών
- $φ(0)=f(0)-g(0)=-g(0)\leq 0$
  $φ(2)=f(2)-g(2)=6-g(2)\geq 0$ $\Big\}$ $φ(0)φ(2)\leq 0$

<u>Διότι</u>, η $C_g$ βρίσκεται στο ορθογώνιο ΟΑΒΓ, άρα
$0\leq g(x)\leq 6$ για κάθε $x\in[0,2]$, επομένως

- για $x=0$, $g(0)\geq 0 \Leftrightarrow -g(0)\leq 0$
- για $x=2$ $g(2)\leq 6 \Leftrightarrow 6-g(2)\geq 0$

- Αν $φ(0)\cdot φ(2)<0$, τότε από Θεώρημα Bolzano η εξίσωση $φ(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,2)$

- Αν $φ(0)\cdot φ(2)=0$ τότε $φ(0)=0$ ή $φ(2)=0$

Από τα παραπάνω τελικά προκύπτει ότι η εξίσωση
$φ(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=g(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα
στο $[0,2]$.

Γ5. $h(x)=f(1-\sigma\upsilon\nu x)$, $x\in[0,\pi]$

• Για $x\in[0,\pi]$, $0\le x\le\pi \overset{\sigma\upsilon\nu x \downarrow}{\Longleftrightarrow} \sigma\upsilon\nu\pi\le\sigma\upsilon\nu x\le\sigma\upsilon\nu 0$

$\Leftrightarrow -1\le\sigma\upsilon\nu x\le 1 \Leftrightarrow -1\le-\sigma\upsilon\nu x\le 1$

$\Leftrightarrow 0\le 1-\sigma\upsilon\nu x\le 2$

• Για $x\in[0,2]$, $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-x=0 \Leftrightarrow x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ή $x-1=0$ ή $x+1=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$ ή $x=-1$ απορρίπτεται

Άρα για $x\in[0,\pi]$, $h(x)=0 \Leftrightarrow f(1-\sigma\upsilon\nu x)=0$

$\Leftrightarrow 1-\sigma\upsilon\nu x=0$ ή $1-\sigma\upsilon\nu x=1$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=1$ ή $\sigma\upsilon\nu x=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ή $x=\frac{\pi}{2}$.

Η h είναι συνεχής στο $[0,\pi]$, ως σύνθεση συνεχών και $h(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi]$, άρα η h θα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(0,\frac{\pi}{2})$ και $(\frac{\pi}{2},\pi]$.

• $h(\frac{\pi}{3})=f(1-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3})=f(1-\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{8}<0$

άρα $h(x)<0$ για $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

• $h(\pi)=f(1-\sigma\upsilon\nu\pi)=f(1+1)=f(2)=8-2=6>0$

άρα $h(x)>0$ για $x\in(\frac{\pi}{2},\pi]$.

Επομένως $h(x)<0$ για $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ και $h(x)>0$, για $x\in(\frac{\pi}{2},\pi]$.

## ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=e^x+2x-1$, $x\leq 0$.

Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in(-\infty,0]$ με $x_1<x_2$:

- $x_1<x_2 \Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2}$
- $x_1<x_2 \rightarrow 2x_1<2x_2 \Rightarrow 2x_1-1<2x_2-1$

προσθέτω κατά μέλη $e^{x_1}+2x_1-1<e^{x_2}+2x_2-1 \Rightarrow h(x_1)<h(x_2)$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$, επομένως και 1-1.

- Για $x\leq 0$, $h(x)=0 \Leftrightarrow h(x)=h(0) \overset{h\ 1-1}{\Longleftrightarrow} x=0$
- Για $x<0 \overset{h\uparrow}{\Longleftrightarrow} h(x)<h(0) \Leftrightarrow h(x)<0$

$h(x)\leq 0$ (1) για $x\leq 0$.

- Για $x\leq 0$, $g^2(x)=(e^x+2x-1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{g^2(x)}=\sqrt{h^2(x)}$

$\Leftrightarrow |g(x)|=|h(x)| \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} |g(x)|=-h(x)$ (2)

- Για $x\leq 0$, $g(x)=0 \Leftrightarrow |g(x)|=0 \overset{(2)}{\Longleftrightarrow} -h(x)=0 \Leftrightarrow h(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

Άρα $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$ και συνεχής, οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-\infty,0)$.

Όμως $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{g(x)}=+\infty$, άρα $\dfrac{1}{g(x)}>0 \Leftrightarrow g(x)>0$ κοντά στο $0^-$

Επομένως $g(x)>0$ για $x\in(-\infty,0)$ και $g(0)=0$, άρα $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\leq 0$, οπότε από (2) έχουμε

$g(x)=-h(x) \Leftrightarrow g(x)=-e^x-2x+1$, $x\leq 0$.

Δ2. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{b\cdot 2^x - b^{x+1}}{2\cdot b^x + 2^{x+1}}, & x>0 \\ g(x), & x\leq 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{b\cdot 2^x-b^{x+1}}{2\cdot b^x+2^{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{b\cdot 2^x-b\cdot b^x}{2\cdot b^x+2\cdot 2^x}=-\frac{3}{2}$$

• Αν $b\in(0,1)\cup(1,2)$ τότε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\cdot\left[b-b\left(\frac{b}{2}\right)^x\right]}{2^x\cdot\left[\left(\frac{b}{2}\right)^x+2\right]}=\lim_{x\to+\infty}\frac{b-b\cdot\left(\frac{b}{2}\right)^x}{\left(\frac{b}{2}\right)^x+2}=\frac{b-b\cdot 0}{0+2}=\frac{b}{2}$$

<u>διότι</u> $0<\frac{b}{2}<1$ άρα $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{b}{2}\right)^x=0$

Επομένως $\frac{b}{2}=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow b=-3$ απορρίπτεται

• Αν $b=2$ τότε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot 2^x-2\cdot 2^x}{2\cdot 2^x+2\cdot 2^x}=0,$$ άτοπο

• Αν $b\in(2,+\infty)$ τότε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{b^x\left[b\cdot\left(\frac{2}{b}\right)^x-b\right]}{b^x\left[2+2\cdot\left(\frac{2}{b}\right)^x\right]}=\lim_{x\to+\infty}\frac{b\cdot\left(\frac{2}{b}\right)^x-b}{2+2\cdot\left(\frac{2}{b}\right)^x}$$

$$=\frac{b\cdot 0-b}{2+2\cdot 0}=\frac{-b}{2}$$

<u>διότι</u> $0<\frac{2}{b}<1$ άρα $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{b}\right)^x=0$

Επομένως $-\frac{b}{2}=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow b=3$ δεκτή

Άρα $\boxed{b=3}$.

Δ3. Θεωρούμε συνάρτηση $\varphi(x)=g(x)-T(x)$, $x<0$ (10)

- $\varphi$ συνεχής στο $(-\infty,0)$ ως πράξης και σύνθεση συνεχών
- $\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to-\infty}(g(x)-T(x))=+\infty$, διότι

→ $\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}(1-e^x-2x)=+\infty$, αφού $\lim_{x\to-\infty}(1-e^x)=1-0=1$

και $\lim_{x\to-\infty}(-2x)=+\infty$

→ $\lim_{x\to-\infty}T(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(1+x\eta\mu\frac{1}{x}\right)\xrightarrow[u\to0]{\frac{1}{x}=u,\ x\to-\infty}\lim_{u\to0}\left(1+\frac{\eta\mu u}{u}\right)=1+1=2$

άρα υπάρχει α κοντά στο $-\infty$ τέτοιο ώστε $\varphi(\alpha)>0$

- $\lim_{x\to0^-}\varphi(x)=\lim_{x\to0^-}(g(x)-T(x))=0-1=-1<0$

→ $\lim_{x\to0^-}g(x)=\lim_{x\to0^-}(1-e^x-2x)=0$

→ $\lim_{x\to0^-}T(x)=\lim_{x\to0^-}\left(1+x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=1+0=1$, αφού

για $x<0$ έχουμε: $\left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right|=|x|\cdot\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|\leq|x|$

άρα $-|x|\leq x\eta\mu\frac{1}{x}\leq|x|$ με $\lim_{x\to0^-}(-|x|)=0=\lim_{x\to0^-}|x|$

επομένως από κ.π. $\lim_{x\to0^-}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0$.

άρα υπάρχει β κοντά στο $0^-$ τέτοιο ώστε $\varphi(\beta)<0$

Συμπ. $\varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta)<0$

Επομένως από Θ. Bolzano η εξίσωση $\varphi(x)=0\Leftrightarrow g(x)=T(x)$ θα έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(\alpha,\beta)\subseteq(-\infty,0)$.

β) Ισχύει ότι $T'\left(\frac{1}{\pi}\right)=\pi$ άρα έχουμε

$$\lim_{x\to \frac{1}{\pi}} \frac{T(x)-T\left(\frac{1}{\pi}\right)}{x-\frac{1}{\pi}} = \lim_{x\to \frac{1}{\pi}} \frac{T(x)-1}{x-\frac{1}{\pi}} = \pi.$$

$$K=\lim_{x\to +\infty} x\cdot\left(1-T\left(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1-T\left(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$\xrightarrow[\substack{x\to+\infty \\ u\to \frac{1}{\pi}}]{\substack{\frac{1}{\pi}-\frac{1}{x}=u \\ \frac{1}{x}=\frac{1}{\pi}-u}} \lim_{u\to \frac{1}{\pi}} \frac{1-T(u)}{\frac{1}{\pi}-u} = \lim_{u\to \frac{1}{\pi}} \frac{T(u)-1}{u-\frac{1}{\pi}} = T'\left(\frac{1}{\pi}\right)=\pi$$

Άρα $\boxed{K=\pi}$.

14. Αρκεί να δείξω ότι στο $(1,2)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα η εξίσωση $\frac{f(kx)-f\left(\frac{2k}{x^2}\right)}{x-1} + \frac{f(\lambda x)-f(\eta\mu(\lambda x))}{x-2} = 2025$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[f(kx)-f\left(\frac{2k}{x^2}\right)\right] + (x-1)\left[f(\lambda x)-f(\eta\mu(\lambda x))\right] - 2025(x-1)(x-2)=0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση,

$$\varphi(x)=(x-2)\left[f(kx)-f\left(\frac{2k}{x^2}\right)\right]+(x-1)\left[f(\lambda x)-f(\eta\mu(\lambda x))\right]-2025(x-1)(x-2)$$

με $x\in[1,2]$.

· $\varphi$ συνεχής στο $[1,2]$, ως πράξεις και σύνθεση συνεχών

· $\varphi(1)=-f(k)+f(2k)>0$ διότι για $k<0 \Leftrightarrow k>2k \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(k)<f(2k) \Leftrightarrow f(2k)-f(k)>0$

$\varphi(2)=f(2\lambda)-f(\eta\mu(2\lambda))<0$ , διότι

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $|\eta\mu x| \leq |x|$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$.

Άρα για $\lambda>0 \Leftrightarrow 2\lambda>0$ άρα έχουμε:

$$|\eta\mu(2\lambda)| < 2\lambda \Leftrightarrow -2\lambda < \eta\mu(2\lambda) < 2\lambda$$

δηλαδή $\eta\mu(2\lambda) < 2\lambda \overset{f\downarrow}{\Longleftrightarrow} f(\eta\mu(2\lambda)) > f(2\lambda) \Leftrightarrow$

$f(2\lambda) - f(\eta\mu(2\lambda)) < 0$

Επομένως $\varphi(1)\varphi(2)<0$, άρα από Θεώρημα Bolzano

η εξίσωση $\varphi(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{f(kx) - f(\frac{2k}{x^2})}{x-1} + \dfrac{f(2x) - f(\eta\mu(2x))}{x-2} = 2025$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$.