αξία

ΟΜΙΛΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

01/06/24

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ (σελ 31)

Α2 α) ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ (σελ 65)

β) ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ (σελ 86 – 87)

Α3. α) ΛΑΘΟΣ

β) ΛΑΘΟΣ

γ) ΣΩΣΤΟ

δ) ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot x^2 - 3\cdot 2\cdot x + 5\cdot 1 + 0 = x^2 - 6x + 5$$

Β2 • $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot(x-5) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 5$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

• η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[5, +\infty)$

• η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 5]$.

- η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_1 = 1$ το $f(1) = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$
- η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_2 = 5$ το $f(5) = \frac{1}{3} \cdot 125 - 3 \cdot 25 + 5 \cdot 5 + \frac{1}{3} = -8$

Β3. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$ θα είναι της μορφής (ε): $y = \lambda \cdot x + \beta$

Έχουμε $\lambda = f'(0) = 5$ και $f(0) = \lambda \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow$

$\frac{1}{3} = 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{3}$

(ε) $y = 5 \cdot x + \frac{1}{3}$

Β4. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = f'(-1) = (-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 5 = 1 + 6 + 5 = 12$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $s = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{2x - 2} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)} \cdot (x+7)}{2 \cdot \cancel{(x-1)}} = \frac{1+7}{2} = \frac{8}{2} = 4$

$\boxed{s = 4}$

Γ2. $CV = 0{,}2 \Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}} = 0{,}2 \Leftrightarrow \frac{4}{\bar{x}} = 0{,}2 \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{4}{0{,}2} \Leftrightarrow$

$\boxed{\bar{x} = 20}$ (σε βαθμούς °C)

Γ3. $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} \Longleftrightarrow$

$20 = \dfrac{22 + 18 + (20 + k) + 14 + 16}{5} \Longleftrightarrow$

$100 = 90 + k \Longleftrightarrow \boxed{k = 10}$

$\underline{14}, \underline{16}, \underline{18}, \underline{22}, \underline{30}$

$\boxed{\delta = 18}$

Η διάμεσος είναι το 18.

Γ4. Αν x_i, $i = 1, 2, \dots, 5$ είναι οι τιμές της θερμοκρασίας το πρωί της ημέρας και y_i, $i = 1, 2, \dots, 5$ είναι οι τιμές της θερμοκρασίας το μεσημέρι της ίδιας ημέρας, τότε:

$$y_i = x_i + \frac{10}{100} \cdot x_i = 1,1 \cdot x_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, 5$$

Έχουμε:
$\bar{y} = 1,1 \cdot \bar{x}$ (1)

$s_y = 1,1 \cdot s_x$ (2)

Επομένως: $CV_y = \dfrac{s_y}{\bar{y}} \overset{(1)}{\underset{(2)}{=}} \dfrac{\cancel{1,1} \cdot s_x}{\cancel{1,1} \, \bar{x}} = \dfrac{s_x}{\bar{x}} = CV_x = 0,2$

ή 20%

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΒ ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα: $(OA)^2 + (OB)^2 = (AB)^2 \Longleftrightarrow$

$$x^2 + y^2 = 100 \quad (1)$$

Επειδή τα x, y είναι τα μήκη των καθέτων πλευρών του τριγώνου, θα πρέπει:

$$x > 0 \; (2) \quad \text{και} \quad y > 0$$

Επομένως η (1) γράφεται:

$$y^2 = 100 - x^2 \Longleftrightarrow$$
$$y = \sqrt{100 - x^2}$$

Επιπλέον θα πρέπει $y > 0 \Longleftrightarrow 100 - x^2 > 0 \Longleftrightarrow$

$$x^2 < 100 \Longleftrightarrow |x| < 10 \Longleftrightarrow$$
$$-10 < x < 10 \quad (3)$$

Από (2), (3): $0 < x < 10$

Τελικά η πλευρά y εκφράζεται ως συνάρτηση του x από τον τύπο

$$y = f(x) = \sqrt{100 - x^2}, \quad 0 < x < 10$$

Προφανώς το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (0,10)$

Δ2. $$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{100 - x^2}} \cdot (100 - x^2)' = \frac{-2 \cdot x}{2 \cdot \sqrt{100 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{100 - x^2}}$$

Άρα $$f'(8) = \frac{-8}{\sqrt{100 - 8^2}} = \frac{-8}{\sqrt{36}} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$$

αξία

ΟΜΙΛΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Δ3.
$$\lim_{x\to 6}\frac{f(x)-8}{x-6}=\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{100-x^2}-8}{x-6}=$$
$$=\lim_{x\to 6}\frac{(\sqrt{100-x^2}-8)\cdot(\sqrt{100-x^2}+8)}{(x-6)\cdot(\sqrt{100-x^2}+8)}$$
$$=\lim_{x\to 6}\frac{100-x^2-64}{(x-6)\cdot(\sqrt{100-x^2}+8)}$$
$$=\lim_{x\to 6}\frac{36-x^2}{(x-6)\cdot(\sqrt{100-x^2}+8)}$$
$$=-\lim_{x\to 6}\frac{(x-\cancel{6})\cdot(x+6)}{(x-\cancel{6})\cdot(\sqrt{100-x^2}+8)}$$
$$=-\frac{6+6}{\sqrt{100-36}+8}=-\frac{12}{16}=-\frac{3}{4}$$

Δ4 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,10)$ με $f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{100-x^2}}<0$ αφού $\sqrt{100-x^2}=y>0$ και $x>0$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,10)$

Έχουμε: $x_1<x_3<x_2$ και αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα ισχύει: $f(x_1)>f(x_3)>f(x_2)$