ΒΑΘΜΟΛΟΓΗΣΗ	
Θ1	Θ2
Θ3	Θ4
ΣΥΝΟΛΟ	

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**
Επιμέλεια Θεμάτων: **ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΑΞΙΑ**
Τάξη: **Γ'ΛΥΚΕΙΟΥ**
Ημερομηνία: **01-05-2024**
Ονοματεπώνυμο:

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα [α,β] και G είναι μια παράγουσα της f στο [α,β], τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = G(\beta) - G(\alpha)$$

(Μονάδες 6)

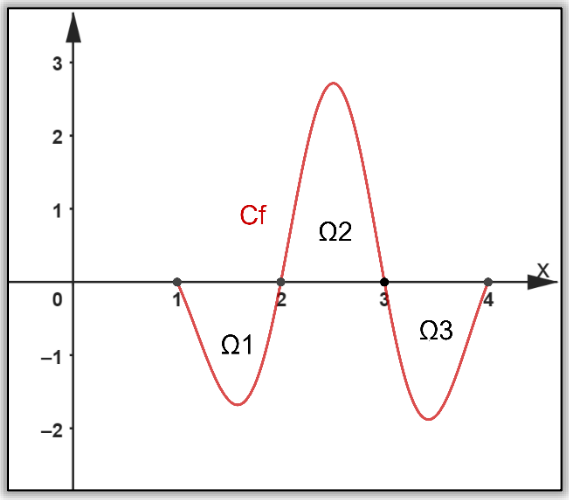
Α2. Έστω f μια συνάρτηση που είναι συνεχής στο διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα Δ;

(Μονάδες 3)

Α3. Έστω f μια συνάρτηση που ορίζεται σ' ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

(Μονάδες 4)

Α4. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης $f: [1,4] \to \mathbb{R}$ και τα χωρία $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ που έχουν εμβαδά: $\boldsymbol{E(\Omega_1) = E(\Omega_3) = 1}$ και $\boldsymbol{E(\Omega_2) = 2}$ **τ.μ.**



Να μεταφέρετε τις παρακάτω ισότητες στο τετράδιό σας και να τις συμπληρώσετε.

$$\int_1^2 f(x)dx = \ldots \qquad \int_2^3 f(x)dx = \ldots$$

$$\int_1^4 f(x)dx = \ldots \qquad \int_1^3 |f(x)|dx = \ldots$$

(Μονάδες 4)

Α5. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (**Σ**) ή λανθασμένη (**Λ**) κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x. **Σ Λ**

β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και $x_1, x_2 \in \Delta$ είναι δυο οποιεσδήποτε ρίζες της, με $x_1 < x_2$, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο (x_1, x_2). **Σ Λ**

γ) Για κάθε συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in [\alpha, \beta]$, ισχύει : $f'(x_0) = 0$. **Σ Λ**

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$$ **Σ Λ**

(Μονάδες 2x4)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

- $\boldsymbol{f(x) = (e^x + 1)^2 + 1 , x \in \mathbb{R}}$
- $\boldsymbol{g(x) = 1 + \ln x , x \in (0, +\infty)}$

Β1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

(Μονάδες 5)

Αν $\boldsymbol{f^{-1}(x) = \ln\left(\sqrt{x-1} - 1\right), x \in (2, +\infty)}$ **, τότε**

Β2. Να βρείτε την $\boldsymbol{f^{-1} o g}$.

(Μονάδες 5)

Β3. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς μονοτονία και την κυρτότητα.

(Μονάδες 5)

Β4. Να βρείτε την ασύμπτωτη **ε** της C_f στο $-\infty$ και να δείξετε ότι η ευθεία **ε** είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 4)

Β5. Να κάνετε την γραφική παράσταση της f και στη συνέχεια, **χωρίς επιπλέον μελέτη**, να χαράξετε πρόχειρα στο ίδιο σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση της $\boldsymbol{f^{-1}}$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^2 - \alpha x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, **με** $\alpha \leq 1$.
Επιπλέον δίνεται ότι το χωρίο που περικλείεται από **την γραφική παράσταση της** f', τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία $x = 1$ έχει εμβαδόν $E = e - 1$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

(Μονάδες 3)

Γ2. Να βρείτε το α.

(Μονάδες 5)

Αν $\alpha = 1$, τότε

Γ3. α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να δείξετε ότι:

$$f(e^x) + \eta\mu x > e^{\eta\mu x} + \eta\mu^2 x + 1, \text{ για κάθε } x \in [0, \pi].$$

(Μονάδες 5+3)

Γ4. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο $A(1, f(1))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων και να λύσετε την εξίσωση:

$$f'(f(x) - 1) = e + 1$$

(Μονάδες 4)

Γ5. Να υπολογίσετε το όριο:

$$L = \lim_{x \to 1} \frac{\eta\mu(\pi x)}{(x-1)\{f'(f(x)) - f'(ex + x)\}}$$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

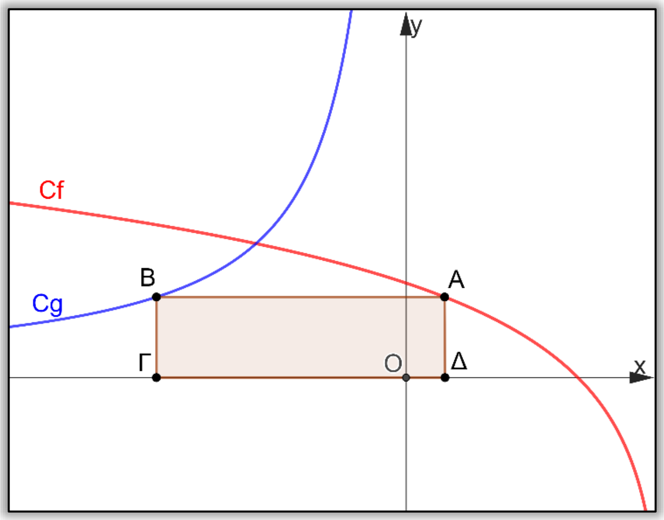
Δίνεται η συνάρτηση: $h(x) = x\ln(3 - x) + e$, $x < 3$

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση h έχει ακριβώς ένα κρίσιμο σημείο x_o και ότι αυτό βρίσκεται στο διάστημα $(1,2)$.

(Μονάδες 5)

Δ2. Να δείξετε ότι η h έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 1 < 2 < x_2$.

(Μονάδες 5)



Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

- $f(x) = \ln(3-x)\,, x < 3$
- $g(x) = -\dfrac{e}{x}\ ,\ x < 0$

και τα σημεία

$A(\alpha, f(\alpha)), B(\beta, g(\beta)), \Gamma, \Delta.$

Επιπλέον δίνεται ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο και ότι για τις τετμημένες των κορυφών A, B ισχύει: $0 \leq \alpha < 2 \; \kappa\alpha\iota \; \beta < 0$.

Δ3. α) Να δείξετε ότι: $\beta = \dfrac{-e}{ln(3-\alpha)}$

β) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου δίνεται από την συνάρτηση h του ερωτήματος **Δ1.** και έχει μέγιστη τιμή $h(x_o) = e + \dfrac{x_o^2}{3-x_o}$.

(Μονάδες 5+5)

Δ4. Αν είναι γνωστό ότι η ευθεία ε: $y = -2x + e + 4$ εφάπτεται στη C_h στο σημείο $A(2, h(2))$, να δείξετε ότι:

$$0 < \int_1^2 \frac{h(x) - e}{2(x+1)} dx < 3ln\left(\frac{3}{2}\right) - 1$$

(Μονάδες 5)

Καλή Επιτυχία !!!