Λύσεις Διαγωνίσματος
Μαθηματικά Προσανατολισμού
Γ' Λυκείου
01-05-2024.

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 217

Α2. Σχολικό Βιβλίο σελ. 155

Α3. Σχολικό Βιβλίο σελ. 185

Α4. $\int_1^2 f(x)dx = -1$ $\quad \int_2^3 f(x)dx = 2$

$\int_1^4 f(x)dx = 0$ $\quad \int_1^3 |f(x)|dx = 3$

Α5. α) Σ β) Λ γ) Λ δ) Σ.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $D_f=\mathbb{R}$ με

$f'(x)=2(e^x+1)\cdot(e^x+1)'=2e^x(e^x+1)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f=\mathbb{R}$, επομένως και 1-1 άρα αντιστρέφεται

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$

$f(x)=y \Leftrightarrow (e^x+1)^2+1=y \Leftrightarrow (e^x+1)^2=y-1$ (1)

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $e^x>0 \Leftrightarrow e^x+1>1 \Leftrightarrow (e^x+1)^2>1^2$

άρα πρέπει $y-1>1 \Leftrightarrow y>2$

Για $y>2$, από (1) έχω: $e^x+1=\sqrt{y-1} \Leftrightarrow e^x=\sqrt{y-1}-1$ (2)

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $e^x>0$ άρα $\sqrt{y-1}-1>0 \Leftrightarrow \sqrt{y-1}>1$ $\Leftrightarrow y>2$

Για $y>2$, από (2): $x=\ln(\sqrt{y-1}-1)$, δηλαδή

έχουμε $f^{-1}(y)=\ln(\sqrt{y-1}-1)$, $y>2$

Επομένως $\boxed{f^{-1}(x)=\ln(\sqrt{x-1}-1),\ x>2}$

Β2. $D_{f^{-1}\circ g}=\{x\in D_g \text{ και } g(x)\in D_{f^{-1}}\}$ δηλαδή θα πρέπει

$\underline{x>0}$ και $g(x)>2 \Leftrightarrow 1+\ln x>2 \Leftrightarrow \ln x>1 \Leftrightarrow \underline{x>e}$

άρα $D_{f^{-1}\circ g}=(e,+\infty)$

$(f^{-1}\circ g)(x)=f^{-1}(g(x))=\ln\left(\sqrt{1+\ln x-1}-1\right)=\ln(\sqrt{\ln x}-1)$, $x>e$.

B3. Από B1. η f είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f=\mathbb{R}$

$f'(x)=2e^{2x}+2e^{x},\ x\in\mathbb{R}$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f''(x)=4e^{2x}+2e^{x}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα f κυρτή στο $\mathbb{R}$

B4. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(e^{x}+1)^2+1\right]=(0+1)^2+1=2$

Άρα η ευθεία $\varepsilon: y=2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

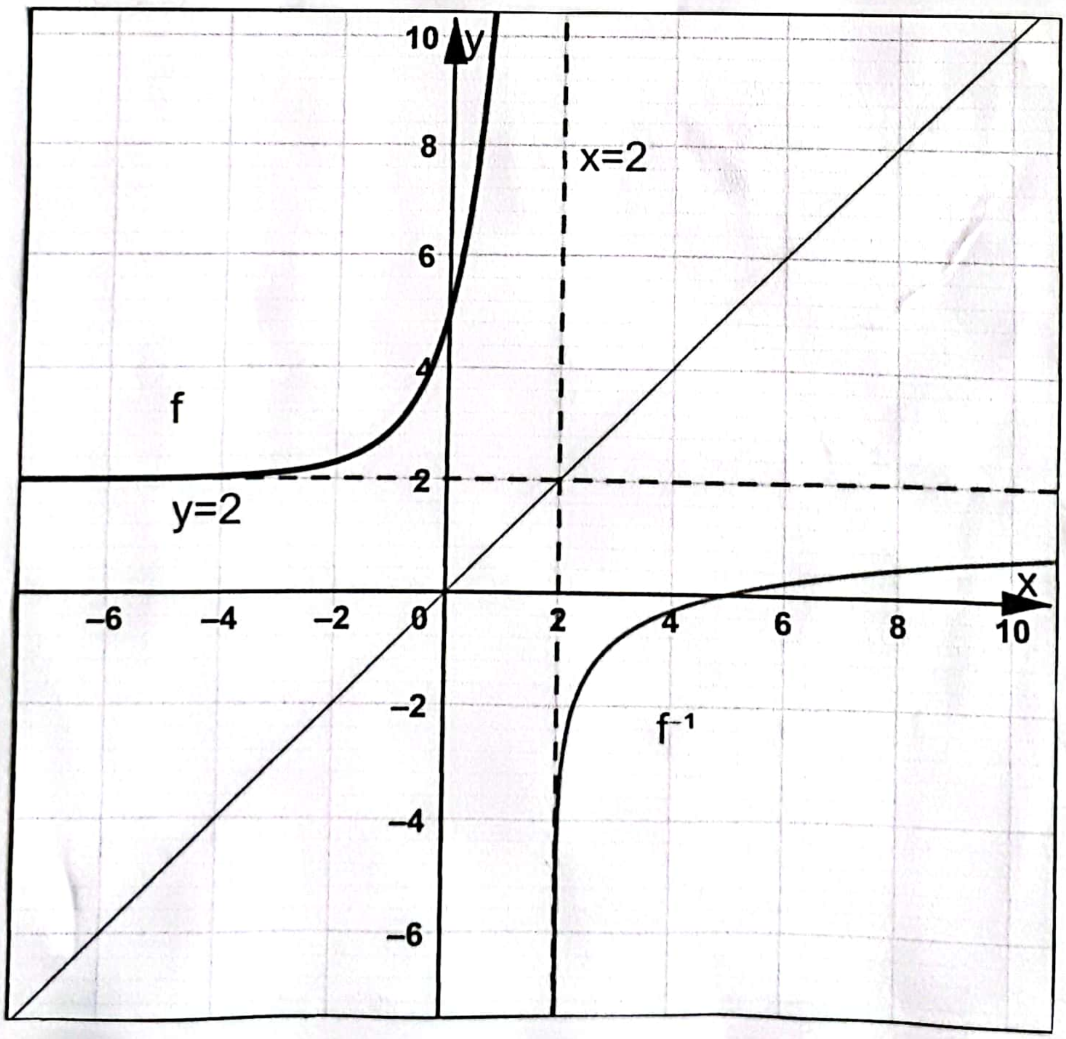
Αρκεί να δείξω ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f(x)>2$

Από B2. $D_{f^{-1}}=(2,+\infty)$ δηλαδή $f(D_f)=(2,+\infty)$

άρα $f(x)>2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως η $\varepsilon: y=2$ είναι κάτω από τη C_f.

B5.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x)=e^x+x^2-ax+1,\ x\in\mathbb{R},\ a\le 1$

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $D_f=\mathbb{R}$ με

$f'(x)=e^x+2x-a$

$f''(x)=e^x+2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα η f είναι κυρτή στο $D_f=\mathbb{R}$.

Γ2. Η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, και το εμβαδόν που περικλείεται από τη $C_{f'}$, τον άξονα x'x, τον y'y και την ευθεία $x=1$, δίνεται από το ολοκλήρωμα $\int_0^1|f'(x)|dx$ άρα $\int_0^1|f'(x)|dx=e-1$

Όμως από Γ1. η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

άρα για $x\ge 0 \xrightarrow{f'\uparrow} f'(x)\ge f'(0) \Rightarrow f'(x)\ge 1-a\ge 0$

άρα $f'(x)\ge 0$ για $x\in[0,1]$ επομένως

$E=\int_0^1|f'(x)|dx=\int_0^1 f'(x)dx$ δηλ. $\int_0^1 f'(x)dx=e-1 \Leftrightarrow$

$[f(x)]_0^1=e-1 \Leftrightarrow e+1-a+1-(1+1)=e-1 \Leftrightarrow -a=-1$

$\Leftrightarrow \boxed{a=1}$. Άρα $f(x)=e^x+x^2-x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

Γ3. α) $f'(x)=e^x+2x-1,\ x\in\mathbb{R}$ με $f'(0)=1$

και $f'\uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

- Για $x<0 \xrightarrow{f'\uparrow} f'(x)<f'(0)=0$ και f συνεχής στο $(-\infty,0]$ άρα $f\downarrow(-\infty,0]$
- Για $x>0 \xrightarrow{f'\uparrow} f'(x)>f'(0)=0$ και f συνεχής στο $[0,+\infty)$ άρα $f\uparrow$ στο $[0,+\infty)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

- $x<0 \xrightarrow{f\downarrow} f(x)>f(0)=2$
- $x>0 \xrightarrow{f\uparrow} f(x)>f(0)=2$

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $x=0$ ίσο με $f(0)=2$.

β) Αρκεί να δείξω ότι για κάθε $x \in [0,\pi]$ ισχύει
$f(e^x) + ημx > e^{ημx} + ημ^2x + 1 \Leftrightarrow$
$f(e^x) > e^{ημx} + ημ^2x - ημx + 1 \Leftrightarrow f(e^x) > f(ημx)$.

· Για κάθε $x \in [0,\pi]$, $e^x \geq 1$ και $0 \leq ημx \leq 1$ άρα
$ημx \leq 1 \leq e^x$ για κάθε $x \in [0,\pi]$
Η ισότητα $ημx = e^x$ θα ισχύει μόνο αν
$\begin{cases} ημx = 1 \\ e^x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ημx = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ Άτοπο.

Άρα για κάθε $x \in [0,\pi]$ ισχύει ότι:
$0 \leq ημx < e^x \xRightarrow{f \uparrow [0,+\infty)} f(ημx) < f(e^x)$.

Γ4. Έχουμε ότι $f(1) = e+1$, $f'(1) = e+1$
Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f στο $A(1, f(1))$
είναι: $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = f'(1)(x-1) + f(1)$
$\Leftrightarrow y = (e+1)(x-1) + e + 1$ άρα $\boxed{ε: y = (e+1)x}$
η οποία ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$

· Για $x \in \mathbb{R}$, $f'(f(x)-1) = e+1 \Leftrightarrow f'(f(x)-1) = f'(1) \xLeftrightarrow[f' \, 1-1]{f' \uparrow}$
$f(x) - 1 = 1 \Leftrightarrow f(x) = 2 \Leftrightarrow \boxed{x = 0}$
διότι από Γ3 α), η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=0$, το $f(0) = 2$, δηλαδή $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Γ5. $L = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{ημ(πx)}{x-1} \cdot \dfrac{1}{f'(f(x)) - f'(ex+x)}$

• $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{ημπx}{x-1} \underset{DLH}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{πσυνπx}{1} = -π$

• f κυρτή στο $\mathbb{R}$, άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη ε με εξαίρεση το σημείο επαφής, άρα $f(x) \geq (e+1)\cdot x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$

Άρα κοντά στο 1, $f(x) > (ex+e) \overset{f'\uparrow}{\Longleftrightarrow} f'(f(x)) > f'(ex+e)$

$\Longleftrightarrow f'(f(x)) - f'(ex+e) > 0$

και $\lim\limits_{x\to 1} \left(f'(f(x)) - f'(ex+e)\right) \underset{f \text{ συνεχής}}{\overset{f' \text{ συνεχής}}{=}} f'(f(1)) - f'(e+1) = 0$

άρα $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{f'(f(x)) - f'(ex+e)} = +\infty$

Επομένως $\boxed{L = -\infty}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $h(x) = x\ln(3-x) + e$, $x<3$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 3)$ ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$h'(x) = \ln(3-x) - \dfrac{x}{3-x}$

Η h' είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 3)$ ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$h''(x) = -\dfrac{1}{3-x} - \dfrac{3}{(3-x)^2} < 0$ για κάθε $x<3$, άρα $h' \downarrow$ στο $(-\infty, 3)$.

• h' συνεχής στο $[1,2]$

$h'(1) = \ln 2 - \frac{1}{2} = \frac{2\ln 2 - 1}{2} = \frac{\ln 4 - \ln e}{2} > 0$

$h'(2) = -2 < 0$ άρα $h'(1)\cdot h'(2) < 0$

Από Θεώρημα Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $h'(x_0) = 0$ και επειδή $h' \downarrow$ θα είναι και μοναδικό.

Επομένως η h έχει ακριβώς ένα κρίσιμο σημείο x_0 με $x_0 \in (1,2)$.

Δ2. Για $x < x_0 \xRightarrow{h'\downarrow} h'(x) > h'(x_0) = 0$

Για $x_0 < x < 3 \xRightarrow{h'\downarrow} h(x) < h'(x_0) = 0$

x	$-\infty$	1	x_0	2	3
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
h		$\nearrow$		$\searrow$	

• $h \uparrow$ και συνεχής στο $\Delta_1 = (-\infty, 1)$ άρα

$h(\Delta_1) = \left(\lim_{x\to-\infty} h(x), \lim_{x\to 1^-} h(x)\right) = (-\infty, e + \ln 2)$

διότι $\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1} (x\ln(3-x) + e) = \ln 2 + e$

$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} (x\ln(3-x) + e) = -\infty$ αφού $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$

και $\lim_{x\to-\infty} \ln(3-x) \underset{\substack{x\to-\infty \\ u\to+\infty}}{\overset{3-x=u}{=\!=\!=}} \lim_{u\to+\infty}(\ln u) = +\infty$.

• $h \downarrow$ και συνεχής στο $\Delta_2 = (2,3)$ άρα

$h(\Delta_2) = \left(\lim_{x\to 3^-} h(x), \lim_{x\to 2^+} h(x)\right) = (-\infty, e)$

διότι $\lim_{x\to 3^-} h(x) = \lim_{x\to 3^-} (x\ln(3-x) + e) = -\infty$, αφού $\lim_{x\to 3^-}(x) = 3$

και $\lim_{x\to 3^-} \ln(3-x) \underset{u\to 0^+}{\overset{\substack{3-x=u \\ x\to 3^-}}{=\!=\!=}} \lim_{u\to 0^+}(\ln u) = -\infty$

$0 \in h(\Delta_1)$ και $h \nearrow$ στο $\Delta_1 = (-\infty, 1)$, άρα η $h(x) = 0$ θα έχει ακριβώς 1 ρίζα στο Δ_1, δηλαδή θα υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \Delta_1$ ώστε $h(x_1) = 0$

$0 \in h(\Delta_2)$ και $h \searrow$ στο $\Delta_2 = (2, +\infty)$, άρα η $h(x) = 0$ θα έχει ακριβώς 1 ρίζα στο Δ_2, δηλαδή θα υπάρχει μοναδικό $x_2 \in \Delta_2$ ώστε $h(x_2) = 0$

Όμως η h είναι γνησίως μονότονη σε καθένα απο τα διαστήματα $(-\infty, x_0]$ και $(x_0, +\infty)$, άρα θα έχει το πολύ 2 ρίζες και εφόσον x_1, x_2 ρίζες της h, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η h έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 1 < 2 < x_2$.

Δ3. α) Εφόσον ΑΒΓΔ ορθογώνιο θα ισχύει $(ΑΔ) = (ΒΓ)$ άρα $f(\alpha) = g(\beta) \Leftrightarrow \ln(3-\alpha) = -\dfrac{e}{\beta}$

• $0 \leq \alpha < 2 \Leftrightarrow -2 < -\alpha \leq 0 \Leftrightarrow 1 < 3-\alpha \leq 3 \Leftrightarrow$
$\ln 1 < \ln(3-\alpha) \leq \ln 3$, άρα $\ln(3-\alpha) > 0$

Επομένως $\beta = \dfrac{-e}{\ln(3-\alpha)} < 0$.

β) Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι

$$(ΑΒΓΔ) = (ΑΒ)\cdot(ΑΔ) = (\alpha-\beta)\cdot f(\alpha) \overset{Δ3\,α)}{=\!=} \left[\alpha + \frac{e}{\ln(3-\alpha)}\right]\cdot \ln(3-\alpha)$$
$$= \alpha \cdot \ln(3-\alpha) + e$$

Άρα $E(\alpha) = \alpha\ln(3-\alpha) + e = h(\alpha)$ με $\alpha \in [0, 2)$.

Η h απο το Δ2 παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 \in (1,2)$ ίσο με $h(x_0) = x_0 \ln(3-x_0) + e$ (1)

Επιπλέον $h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln(3-x_0) - \frac{x_0}{3-x_0} = 0 \Leftrightarrow$

$\ln(3-x_0) = \frac{x_0}{3-x_0}$ (2)

Άρα απο (1),(2) έχουμε $h(x_0) = x_0 \cdot \frac{x_0}{3-x_0} + e \Rightarrow$

$$\boxed{h(x_0) = \frac{x_0^2}{3-x_0} + e}.$$

Δ4. Για κάθε $x \in [1,2]$, $h(x) - e = x\ln(3-x) > 0$ κ' $2(x+1) > 0$ άρα $\frac{h(x)-e}{2(x+1)} > 0$ για κάθε $x \in [1,2]$ και η συνάρτηση $\frac{h(x)-e}{2(x+1)}$ συνεχής στο $[1,2]$, άρα $\int_1^2 \frac{h(x)-e}{2(x+1)}\,dx > 0$ (3).

Απο Δ1 έχουμε $h' \downarrow$ στο $(-\infty,3)$, άρα h κοίλη στο $(-\infty,3)$. Επομένως η C_h βρίσκεται κάτω απο την εφαπτομένη $\varepsilon: y = -2x + e + 4$ με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Άρα για κάθε $x \in [1,2]$ ισχύει $h(x) \leq -2x + e + 4$

Επομένως έχουμε: $\frac{h(x)-e}{2(x+1)} \leq \frac{-2x+e+4-e}{2(x+1)} = \frac{2(-x+2)}{2(x+1)} = \frac{-x+2}{x+1}$

για κάθε $x \in [1,2]$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 2$.

Άρα $\int_1^2 \frac{h(x)-e}{2(x+1)}dx < \int_1^2 \frac{-x+2}{x+1}dx = 3\ln\left(\frac{3}{2}\right)-1$ (4)

<u>διότι</u> $\int_1^2 \frac{-x+2}{x+1}dx = \int_1^2 \frac{-x-1+3}{x+1}dx = \int_1^2 \left(-1+\frac{3}{x+1}\right)dx$

$$= \left[-x+3\ln(x+1)\right]_1^2 = -2+3\ln 3-(-1+3\ln 2)$$

$$= -1+3\ln 3-3\ln 2 = -1+3\ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

Από (3), (4) προκύπτει ότι:

$$0 < \int_1^2 \frac{h(x)-e}{2(x+1)}dx < 3\ln\left(\frac{3}{2}\right)-1.$$