αξία www.axia.edu.gr
ΟΜΙΛΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΕΠΑΛ
01/05/2024

ΘΕΜΑ Α

Α1. ΘΕΩΡΙΑ ΣΧ. ΒΙΒΛΙΟ (σελ 65)

Α2 ΘΕΩΡΙΑ ΣΧ. ΒΙΒΛΙΟ (σελ 96)

Α3. α) ΣΩΣΤΟ

β) ΛΑΘΟΣ

γ) ΣΩΣΤΟ

δ) ΛΑΘΟΣ

ε) ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

i	x_i	ν_i	N_i	f_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$	a_i
1	0	8	8	0,40	0,40	40	40	144°
2	2	6	14	0,30	0,70	30	70	108°
3	4	4	18	0,20	0,90	20	90	72°
4	6	2	20	0,10	1	10	100	36°
		20		1		100		360°

$f_1 = 0{,}40$ και $a_1 = 144°$

$f_2 = 0{,}70 - 0{,}40 = 0{,}30$ και $a_2 = 108°$

$a_3 = 72°$ άρα $f_3 = 0{,}20$

$f_3 = \frac{\nu_3}{\nu} \Leftrightarrow 0{,}20 = \frac{4}{\nu} \Leftrightarrow \frac{20}{100} = \frac{4}{\nu} \Leftrightarrow 20 \cdot \nu = 400 \Leftrightarrow \nu = 20$

$\nu_1 = 0{,}40 \cdot 20 = 8$ άρα $N_1 = 8$

$\nu_2 = 0{,}30 \cdot 20 = 6$ άρα $N_2 = 8 + 6 = 14$

$N_3 = N_2 + \nu_3 = 14 + 4 = 18$

$\nu_4 = \nu - N_3 = 20 - 18 \Leftrightarrow \nu_4 = 2$

$f_4 = \frac{\nu_4}{\nu} = \frac{2}{20} = 0{,}10$ και $\alpha_4 = 36^\circ$

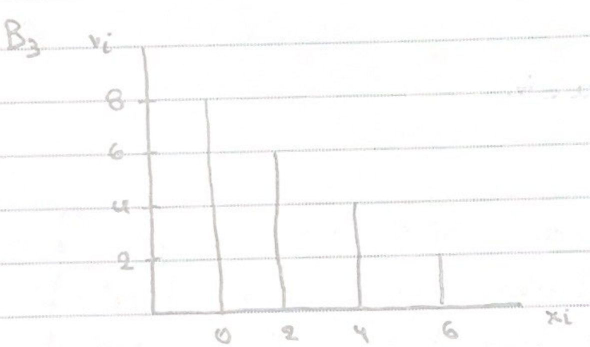
Β2. Το πλήθος των μαθητών που είχαν τουλάχιστον 4 ώρες απουσίας:

$4 + 2 = 6$

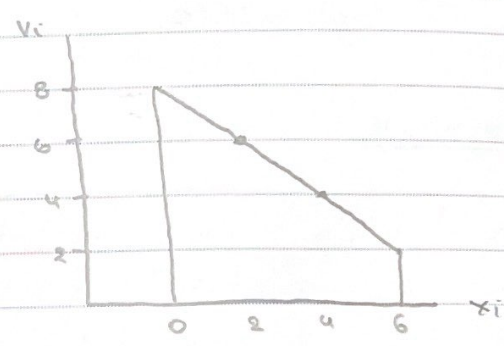
Το ποσοστό των μαθητών που είχαν τουλάχιστον 4 ώρες απουσίας:

$20 + 10 = 30\%$

Β3



Διάγραμμα συχνοτήτων



Πολύγωνο συχνοτήτων

Β4. $\underset{t_1}{0}, \ldots, \underset{t_8}{0}, \underset{t_9}{2}, \ldots, \underset{t_{14}}{2}, \underset{t_{15}}{4}, \ldots, \underset{t_{18}}{4}, \underset{t_{19}}{6}, \underset{t_{20}}{6}$

$\delta = \frac{t_{10} + t_{11}}{2} = \frac{2+2}{2} = \frac{4}{2} = 2$ άρα $\delta = 2$

Β5.

i	x_i	ν_i	$x_i \nu_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})^2 \cdot \nu_i$
1	0	8	0	−2	4	32
2	2	6	12	0	0	0
3	4	4	16	2	4	16
4	6	2	12	4	16	32
		20	40			80

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot \nu_i}{\nu} = \frac{40}{20} \iff \boxed{\bar{x} = 2 \in \mathbb{Z}}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{4} (x_i-\bar{x})^2 \cdot \nu_i}{\nu} = \frac{80}{20} \iff \boxed{s^2 = 4}$$

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = x^3 - s\,x^2 + \frac{\bar{x}}{10} \cdot x + 1 \ (1), \ x \in \mathbb{R}$$

$\bar{x}$: μέση τιμή

s: τυπική απόκλιση

Γ1. $f'(x) = 3 \cdot x^2 - 2 \cdot s \cdot x + \frac{\bar{x}}{10} \cdot 1 + 0 = 3x^2 - 2s \cdot x + \frac{\bar{x}}{10}$ (2)

• Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$ ισχύει:

$$f(1) = 1 \overset{(1)}{\iff} 1^3 - s \cdot 1^2 + \frac{\bar{x}}{10} \cdot 1 + 1 = 1 \iff 1 - s + \frac{\bar{x}}{10} + \cancel{1} - \cancel{1} = 0$$

$$1 - s + \frac{\bar{x}}{10} = 0 \ (3)$$

• Αφού η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο με $x_0 = 0$ σχηματίζει γωνία $45°$ με τον άξονα $x'x$:

αξία www.axia.edu.gr
ΟΜΙΛΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

(2)

$f'(0) = \varepsilon\varphi 45^\circ \Leftrightarrow f'(0) = 1 \Leftrightarrow 3\cdot 0^2 - 2\cdot s\cdot 0 + \frac{\bar{x}}{10} = 1 \Leftrightarrow$

$0 - 0 + \frac{\bar{x}}{10} = 1 \Leftrightarrow \frac{\bar{x}}{10} = 1 \Leftrightarrow \bar{x} = 10$

(3): $1 - s + \frac{\bar{x}}{10} = 0 \Leftrightarrow 1 - s + \frac{10}{10} = 0 \Leftrightarrow 1 - s + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$s = 2$

<u>οπότε</u> $f(x) = x^3 - 2\cdot x^2 + \frac{10}{10}\cdot x + 1$

$f(x) = x^3 - 2\cdot x^2 + x + 1 \quad , x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

Γ2. Η ζητούμενη εφαπτομένη είναι $\zeta: y = \alpha\cdot x + \beta$

$\alpha = f'(0) = 3\cdot 0^2 - 4\cdot 0 + 1$ <u>άρα</u> $\alpha = 1$, οπότε $\zeta: y = 1\cdot x + \beta$

Αφού το σημείο $M(0, f(0))$ ανήκει στην ευθεία ζ:

$f(0) = 1\cdot 0 + \beta \Leftrightarrow$

$0^3 - 2\cdot 0^2 + 0 + 1 = \beta \Leftrightarrow \beta = 1$

Άρα $\zeta: y = 1\cdot x + 1$

Γ3. $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

Για το τριώνυμο $3x^2 - 4x + 1$ έχουμε:

$\alpha = 3 \quad \beta = -4 \quad \gamma = 1$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4\cdot 3\cdot 1 = 16 - 12 = 4$

$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\cdot\alpha} = \frac{4 \pm 2}{6}$, οπότε

$x_1 = \frac{4-2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ και $x_2 = \frac{4+2}{6} = \frac{6}{6} = 1$

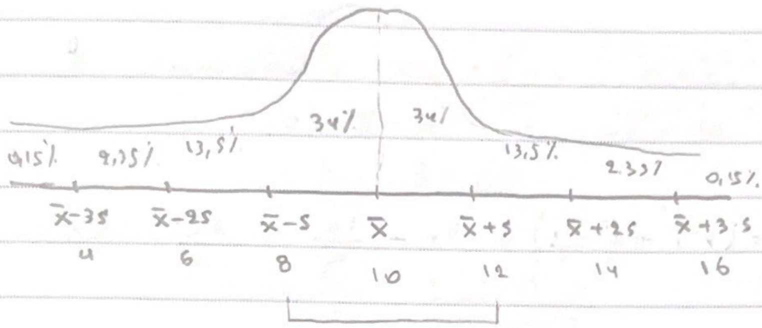
<u>Άρα</u> $3x^2 - 4\cdot x + 1 = 3\cdot\left(x - \frac{1}{3}\right)\cdot(x - 1)$

αξία www.axia.edu.gr
ΟΜΙΛΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-4x+1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3\cdot\cancel{(x-1)}\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\cancel{x-1}}=\lim_{x\to 1}(3x-1)=$$

$$=3\cdot 1-1=3-1=2$$

Γ4.



$\bar{x}=10$

$s=2$

Το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες του 8 και μικρότερες του 14 είναι:

$34+34+13,5=81,5\%$

Γ5. $x(t)=f(t)=t^3-2t^2+t+1$, $t\geq 0$

Η ταχύτητα σε χρόνο t είναι

$\upsilon(t)=x'(t)=f'(t)=3t^2-4t+1$

και για $t=2$: $\upsilon(2)=3\cdot 2^2-4\cdot 2+1=12-8+1=5$

Η επιτάχυνση σε χρόνο t είναι

$a(t)=x''(t)=6t-4$

και για $t=2$: $a(2)=6\cdot 2-4=12-4=8$

αξία www.axia.edu.gr
ΟΜΙΛΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΘΕΜΑ Δ

$f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$

Δ1. Θα πρέπει $x \neq 0$, οπότε η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{0\}$

Δ2. Είναι: $f'(x) = (x^2)' + \left(\frac{16}{x}\right)' = 2x - \frac{16}{x^2} = \frac{2x^3}{x^2} - \frac{16}{x^2}$

$$= \frac{2x^3 - 16}{x^2} = \frac{2\cdot(x^3-8)}{x^2}$$

Δ3. α) Έχουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\cdot(x^3-8)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow$
$x^3 = 8 \Leftrightarrow x^3 = 2^3 \Leftrightarrow$
$x = 2$

x	$-\infty$ 0		2 $+\infty$
f'	$-$	$-$	0 $+$
f	↘	↘	↗

Από τον παραπάνω πίνακα προσήμων της f' έχουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$. Η f παρουσιάζει για $x=2$ τοπικό ελάχιστο με τιμή $f(2) = 2^2 + \frac{16}{2} = 4 + 8 = 12$

β) Ισχύει $f(x) \geq 12$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

$\alpha > 0$ και $\beta > 0$, οπότε

$f(\alpha) \geq 12 \xrightarrow{\cdot 2} 2\cdot f(\alpha) \geq 2\cdot 12 \rightarrow 2\cdot f(\alpha) \geq 24$ (1)

$f(\beta) \geq 12$ (2)

Από (1), (2) έχουμε: $2\cdot f(\alpha) + f(\beta) \geq 24 + 12 \Leftrightarrow$

$2\cdot f(\alpha) + f(\beta) \geq 36$

Δ4.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 f'(x)}{\sqrt{x^2+5}-3} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{x^2}\cdot \frac{2(x^3-8)}{\cancel{x^2}}}{\sqrt{x^2+5}-3} = \lim_{x\to 2} \frac{2(x^3-8)}{\sqrt{x^2+5}-3} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{2(x^3-2^3)\cdot(\sqrt{x^2+5}+3)}{(\sqrt{x^2+5}-3)\cdot(\sqrt{x^2+5}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{2\cdot(x-2)(x^2+x\cdot 2+2^2)\cdot(\sqrt{x^2+5}+3)}{(\sqrt{x^2+5})^2-3^2} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{2\cdot(x-2)\cdot(x^2+2x+4)\cdot(\sqrt{x^2+5}+3)}{x^2+5-9} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{2\cdot(x-2)\cdot(x^2+2x+4)\cdot(\sqrt{x^2+5}+3)}{x^2-4} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{2\cdot\cancel{(x-2)}\,(x^2+2x+4)\,(\sqrt{x^2+5}+3)}{\cancel{(x-2)}(x+2)} =$$

$$= 2\cdot \lim_{x\to 2}\left[\frac{(x^2+2x+4)(\sqrt{x^2+5}+3)}{x+2}\right] = 2\cdot\frac{(4+4+4)\cdot 6}{4} =$$

$$= \frac{\cancel{2}\cdot 12\cdot 6}{\cancel{4}\,2} = 36$$

Δ5. $\bar{x} = f(2) = 12$

$s = \frac{1}{6}\cdot f(2) = \frac{12}{6} = 2$

Οι νέες τιμές είναι $y_i = x_i + c$, $c>0$ με
$\bar{y} = 12 + c$ και $s_y = 2$

Πρέπει $CV_y \le 10\% \iff \frac{s_y}{\bar{y}} \le \frac{10}{100} \iff \frac{2}{12+c} \le \frac{1}{10} \overset{c>0}{\iff}$

$2\cdot 10 \le 12 + c \iff 12 + c \ge 20 \iff$

$c \ge 20 - 12 \iff c \ge 8$

Οπότε ο μικρότερος θετικός είναι το 8.